Corrigé du DM2

Exercice 1 —[Action de groupe et dénombrement]

1. Dénombrons de deux manières différentes le nombre de couples $(g, x) \in G \times X$ tels que $g.x = x$, d'une part en découpant selon les g, et d'autre part en découpant selon les x que l'on regroupera par orbites.

Pour $g \in G$ quelconque, l'ensemble des $x \in X$ tels que $g.x = x$ est exactement X^g, donc

$$\begin{aligned} |\{(g,x) \in G \times X \ ; \ g.x = x\}| &= \sum_{g \in G} |\{x \in X \ ; \ g.x = x\}| \\ &= \sum_{g \in G} |X^g|. \end{aligned}$$

Pour $x \in X$ quelconque, l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.x = x$ est exactement $\mathrm{Stab}_G(x)$. qui est de cardinal $\frac{|G|}{|\Omega_x|}$. Ainsi, en considérant tous les points de l'orbite de x, on a

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \Omega_x} |\{g \in G \ ; \ g.y = y\}| &= \sum_{y \in \Omega_x} \frac{|G|}{|\Omega_x|} \\ &= |G|. \end{aligned}$$

En sommant sur l'ensemble des orbites, dont on notera r le nombre, il vient

$$\begin{aligned} |\{(g,x) \in G \times X \ ; \ g.x = x\}| &= \sum_{y \in X} |\{g \in G \ ; \ g.y = y\}| \\ &= r|G|. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité demandée.

2. Il est assez clair que l'action de G sur les faces du cube est transitive (on pourra considérer les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ d'axe passant par les centres des faces voisines de F). Par ailleurs, les éléments de G qui fixent une face donnée F sont nécessairement des rotations autour de l'axe passant par le centre du cube et le centre de F. Ces rotations sont au nombre de 4, donc

$$\begin{aligned} |G| &= |\operatorname{Stab}_G(F)| \ . \ |\Omega(F)| \\ &= 4 \times 6 = 24. \end{aligned}$$

3. Le groupe G est composé de
— l'identité ;
— les $3 \times 3 = 9$ rotations d'angle $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ autour des trois axes joignant les centres des faces opposées ;
— les 6 rotations d'angle π autour des six axes joignant les milieux des arêtes opposées ;
— les $2 \times 4 = 8$ rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ autour des trois axes joignant les sommets opposés.
Le compte est bon, tous les éléments y sont.

4. Considérons l'ensemble des copies de C dont les faces sont coloriées avec les 3 couleurs autorisées. Chacun de ces éléments correspond à la donnée d'une « fonction de coloriage » qui associe à chaque face une couleur. Le groupe G agit sur cet ensemble, et N est de nombre d'orbites pour cette action. On peut définir formellement cet ensemble comme suit, en notant F l'ensemble des faces du cube :

$$S = \{\sigma : F \to \{rouge, vert, bleu\}\}.$$

À l'aide de l'action de G sur F, on définit l'action de G sur cet ensemble par :

$$g \ . \ \sigma : f \to \sigma(g.f).$$

5. D'après la question 1., on a

$$N = \frac{1}{24} \sum_{g \in G} |S^g|.$$

Il s'agit donc de déterminer, pour chaque symétrie rotationnelle du cube, le nombre d'éléments de S qu'elle fixe. Soit g une symétrie du cube ; elle laisse le coloriage invariant si et seulement si chaque face est envoyée par g sur une face de même couleur :

$$g \ . \ \sigma = \sigma \iff \forall f \in F, \ \sigma(g.f) = \sigma(f),$$

c'est-à-dire, si et seulement si chaque orbite de l'action de $< g >$ sur F est coloriée d'une unique couleur. Il y a donc $3^{O(g)}$ tels coloriages, où $O(g)$ est le nombre d'orbites de F sous l'action de $< g >$. Déterminons donc $O(g)$ pour chaque $g \in G$.

— Pour $g = id$, la formule des classes s'écrit $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, donc $O(g) = 6$;
— pour g une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ autour d'un axe joignant les centres de deux faces opposées, la formule des classes s'écrit $6 = 1 + 1 + 4$, donc $O(g) = 3$;
— pour g une rotation d'angle π autour d'un axe joignant les centres de deux faces opposées, la formule des classes s'écrit $6 = 1 + 1 + 2 + 2$, donc $O(g) = 4$;
— pour g une rotation d'angle π autour d'un axe joignant les milieux de deux arêtes opposées, la formule des classes s'écrit $6 = 2 + 2 + 2$, et donc $O(g) = 3$;
— pour g une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$ autour d'un axe joignant deux sommets opposés, la formule des classes s'écrit $6 = 3+3$, donc $O(g) = 2$.

Au final, on a

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{24}(1 \times 3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 6 \times 3^3 + 8 \times 3^2) \\ &= 57. \end{aligned}$$

Il y a 57 manières de colorier un cube en utilisant au plus trois couleurs.

Exercice 2 —[Groupe dihédral]

1. Par définition, le groupe D_6 est le groupe des isométries d'un triangle, donc si l'on note les trois sommets de ce triangle $\{1, 2, 3\}$, et si on réalise $\mathfrak{S}_3$ comme le groupe de permutation de ces 3 sommets, c'est clair que le groupe D_6 est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$. De plus, D_6 est engendré par deux élements r et s avec la relation $sr = r^2 s$, donc on voit bien que ses éléments sont e, r, r^2, s, sr, sr^2. Comme $\#\mathfrak{S}_3 = 6$ aussi, on en conclut que $D_6 \cong \mathfrak{S}_3$.
2. On note $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le sommet du n-gone correspondant à $e^{2i\pi k/n}$ pour $0 \leq k \leq n$, et [k] la droite qui passe par k et $n/2 + k$ si n est pair et par k et le milieu de l'arrêt $(\frac{n-1}{2} + k\ ;\ \frac{n+1}{2} + k)$ si n est impair. On remarque que la réflexion par rapport à la droite $[k]$ peut se faire en

effectuant d'abord la réflexion s, puis en itérant $2k$ fois la rotation r. On en conclut que toute symétrie permise est un élément du groupe engendré par r, s. Maintenant, comme $rs = sr^{n-1}$, on voit qu'un élément quelconque de D_{2n} s'écrit comme $s^n r^m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$. Vu que l'ordre de s est 2 et de r est n, les éléments de D_{2n} sont $\{r^j, sr^k\}$ avec $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq k \leq n$. En particulier le cardinal de D_{2n} est $2n$.

3. Comme $rs = sr^{n-1}$ et s est d'ordre 2, on voit que $sr^k s = r^{-k}$. Comme tous les symétries s'écrivent sr^k, et le conjugé de sr^k par sr^m est $sr^m sr^k r^{-m} s = sr^{2m-k}$, on en déduit que :
   (a) si n est impair, pour tout k il existe m tel que $2m-k$ est un multiple de n, et il n'y a qu'une seule classe de symétrie, représentée par s ;
   (b) si n est pair, tous les symétries de la forme sr^k avec $k \equiv 0 (mod 2)$ sont conjuguées. Il y a donc deux classes de symétries, représentées par s et sr.
4. Prenons un élément général sr^m , on a
$$(sr^m)r^j(sr^m)^{-1} = sr^j s = r^{-j} \neq sr^k.$$
   Donc les rotations r^j et les symétries sr^k ne sont pas conjuguées, mais deux éléments r^j et r^{-j} le sont. On en conclut que :
   (a) Si n est impair, il y a $(n+1)/2$ classes de conjugaison des rotations, représentées par r^k avec $(0 \leq k \leq \frac{n-1}{2})$, et une seule classe de symétries, représentée par s. Au total, cela nous donne $(n+3)/2$ classes.
   (b) Si n est pair, il y a $n + 1/2$ classes de conjugaison des rotations, représentées par r^k avec $(0 \leq k \leq \frac{n}{2})$, et deux classes de symétries, représentées par s et sr. Au total, cela nous donne $n/2+3$ classes.
5. Soit $\rho : D_{2n} \to \mathbb{C}^*$ une représentation de dimension 1. Comme $\mathbb{C}^*$ est abélien, la représentation ρ se factorise par son quotient abélien :
$$\rho : D_{2n} \to Der(D_{2n}) := D_{2n}/[D_{2n}, D_{2n}] \to \mathbb{C}^*,$$
   où $[D_{2n}, D_{2n}]$ est le groupe dérivé de D_{2n}. Remarquons que
$$[r^m, r^l = 0] \ ; \ [r^j, sr^k] = r^{2j} \ ; \ [sr^j ; sr^k] = r^{2(k-j)}.$$
   Cela implique que le groupe dérivé de D_{2n} est engendré par les éléments de la forme r^{2j}.

Si n est impair, $[D_{2n}, D_{2n}]$ est composé de toutes les rotations, et donc $Der(D_{2n})$ est le groupe à 2 élements $\{e, s\}$. Ses représentations de dimension 1 sont donc le caractère trivial et le déterminant (celui qui envoie s sur -1)

6. Si n est pair, alors $[D_{2n}; D_{2n}]$ contient seulement les rotations r^{2j}, et donc $Der(D_{2n})$ est le groupe abélien à 4 éléments $\{e, r, s, sr = rs\}$. Par conséquence, on a les 4 représentations suivantes :

   (a) Le caractère trivial.

   (b) ρ_{+-} qui envoie r sur 1 et s sur -1.

   (c) ρ_{-+} qui envoie r sur -1 et s sur 1.

   (d) ρ_{--} qui envoie r sur -1 et s sur -1.

   Ces 4 représentations sont deux à deux non isomorphes car leurs caractères sont évidemment différents.