TD 10 : Tables de caractères, représentations

Exercice 1. [Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$] On cherche ici à dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$. On notera ε la signature, et on rappelle qu'on connaît une représentation de dimension 4 qui est la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$.

1. Donner des représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ et le cardinal de chacune de ces classes.
2. Calculer le caractère de la représentation standard (on notera par la suite H pour la représentation standard).
3. Montrer que la représentation $H(\varepsilon)$ est irréductible non isomorphe à H, et donner son caractère.
4. En faisant agir $\mathfrak{S}_5$ sur les paires d'éléments distincts de $\{1, \ldots, 5\}$, construire une représentation de dimension 10 de $\mathfrak{S}_5$.
5. Montrer que cette représentation se décompose comme somme de trois représentations irréductibles, dont la standard et la triviale.
6. En déduire que $\mathfrak{S}_5$ possède une représentation irréductible, qu'on notera W, de dimension 5, et calculer son caractère.
7. En utilisant l'orthogonalité des caractères, montrer que $W' = W(\varepsilon)$ n'est pas isomorphe à W.
8. Dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 2. [Groupes non abéliens d'ordre 8]

1. Donner les classes de conjugaison du groupe dihédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.

Exercice 3. Soient G_1, G_2 deux groupes finis. Déterminer les représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$ en fonction de celles de G_1 et G_2.

Exercice 4. Calculer la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 5. Soit V une représentation de G. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\sigma : V \otimes V &\to V \otimes V \\ a \otimes b &\mapsto b \otimes a\end{aligned}$$

Soient $S^2V = ker(\sigma - id)$ et $\Lambda^2 V = ker(\sigma + id)$.

1. Montrer que σ est un morphisme de représentations de G.
2. Montrer qu'on a une décomposition $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$ comme représentation de G, et calculer la dimension de ces deux sous-espaces.
3. Pour tout $g \in G$, exprimer les valeurs propres de g dans $\Lambda^2 V$ en fonction de ses valeurs propres dans V. En déduire une formule pour le caractère de $\Lambda^2 V$.
4. Trouver une formule pour le caractère de S^2V.

Exercice 6. Soit G un groupe fini, V une représentation fidèle de G et W une représentation irréductible de G.

1. Soit g un élément de G ; montrer que $\chi_V(g)$ est égal à $\dim V$ si et seulement si g est l'élément neutre.
2. Montrer que la série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \chi_W, (\chi_V)^n \rangle T^n$$

   est une fraction rationnelle.
3. Montrer que la fraction rationnelle de la question précédente n'est pas un polynôme.
4. En déduire que la représentation W apparaît comme sous-représentation de $T^n(V)$ pour une infinité d'entiers n.
5. Que se passe-t-il lorsque V n'est plus supposée fidèle ?