ÉNS Lyon L3

Algèbre 1 2017-2018

TD 11 : Groupes classiques

Exercice 1. -

1. Rappeler pourquoi $|GL(k)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ et $|SL_n(k)| = |PGL_n(k)| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ (où k est un corps fini de cardinal q).
2. Montrer que $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$ et $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong PSL_2(\mathbb{F}_2)$.
3. Montrer que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathfrak{S}_4$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 2. -

1. Déterminer $D(GL_2(\mathbb{F}_2))$ et $D(SL_2(\mathbb{F}_3))$.
2. Montrer que $D(SL_n(\mathbb{Z})) = SL_n(\mathbb{Z})$ si $n \geq 3$ (Voir l'exercicwe 4 pour le cas $n = 2$).

Exercice 3. Soit p un nombre premier, montrer que l'application de réduction $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjective. En déduire que pour tout entier N l'application de réduction $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est aussi surjective.

Exercice 4. Soit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et $G =< S, T >$ le sous-groupe engendré par S et T. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que si $c = 0$ alors $M \in G$.
2. Si $c \neq 0$, montrer qu'il existe $N \in G$ tel que NM est de forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$.
3. Conclure que $SL_2(\mathbb{Z}) = G$.
4. Déterminer les ordres des élements ST, S et montrer que le groupe derivé de $SL_2(\mathbb{Z})$ est d'indice inférieur ou égal à 12.[1]

Exercice 5. Dans $SL_2(k)$, toute matrice de transvection est conjugée à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un $x \in k^\times$. De plus $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjugées si et seulement si y/x est un carré dans $k^\times$. En déduire que les classes de conjugaison de transvections dans $SL_2(k)$ sont indexées par $k^\times/(k^\times)^2$.

1. On peut en fait montrer que c'est exactement 12.

Exercice 6. [Simplicité de $PSL_n(k)$] On se propose dans cette exercise de montrer la simplicité de $PSL_n(k)$ pour $n \geq 3$. Soit donc G un sous groupe distingué strict non trivial de $PSL_n(k)$, donc on peut le voir comme un sous groupe distingué de $SL_n(k)$ contenant strictement le centre Z de $SL_n(k)$. Soit $g \in SL_n(k) \backslash Z$.

1. Montrer qu'il existe une transvection τ de vecteur v qui ne commute pas avec g, on pose alors $h = [g, \tau]$.
2. Pout tout $x \in k^n$, exprimer $h(x) - x$ en termes de $g(v)$ et v. Soit H un hyperplan de k^n contenant $g(v)$ et v. Montrer que $h(H) = H$.
3. On suppose qu'il existe une transvection d'hyperplan H ne commutant pas avec h. Montrer alors que G contient une transvection non triviale.
4. Maintenant, on suppose au contraire que h commute avec toutes les transvections d'hyperplan H. Montrer que h est une transvection.
5. Montrer que les transvections de k^n non triviales sont toutes conjugées dans $SL_n(k)$ et conclure.

Exercice 7. [Complémentaire sur la théorie de représentation] Soit G un groupe fini et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation irréductible de G. On se propose de montrer qu'en fait $dim(V)$ divise $|G|$.

1. Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction centrale et posons :
$$f_\rho := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\rho(g^{-1}) \in End(V)$$
Montrer que f_ρ est un endomorphism de (V, ρ) et $tr(f_\rho) =< f, \chi_\rho >$.
2. Montrer que f_ρ est l'homothétie de V de rapport $\frac{<f,\chi_\rho>}{dim(V)}$
3. Soit C une classe de conjugaison de G et $C^{-1} := \{g \in G, g^{-1} \in C\}$ sa classe inverse, appliquer le résultat au-dessus pour la fonction caractéristique $1_{C^{-1}} : G \to C$. Montrer que $\frac{|C|\chi_\rho(C)}{dim(V)}$ est un entier algébrique (i.e une racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers).
4. En conclure que $dim(V)||G|$.