TD2 : Dualité et formes linéaires

Dans toute cette feuille on fixe un corps k, et tous les espaces vectoriels considérés sont sur k. On rappelle que si E est un espace vectoriel, on note $E^* = Hom_k(E,k)$ son dual. Si $F \subset E$ et $G \subset E^*$, on note

$$F^\perp = \{f \in E^*, \forall x \in F, f(x) = 0\}\ , \quad G^\top = \{x \in E, \forall f \in G, f(x) = 0\}.$$

Exercice 1 — On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique e_1, e_2, e_3. Prenons une autre base $v_1 = (1,0,1)$; $v_2 = (1,-1,0)$; $v_3 = (2,0,-1)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer la base duale de $(v_1; v_2; v_3)$ dans la base $(e_1^*; e_2^*; e_3^*)$.

Exercice 2 — Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et (λ_i) une famille d'éléments de V^*.

1. Montrer que les λ_i engendrent V^* si et seulement si $\cap_i \ker \lambda_i = \{0\}$.

2. En déduire que plus généralement, l'espace engendré par les λ_i est le sous-espace $\{\mu \in V^*, \cap_i \ker \lambda_i \subset \ker \mu\}$. Donner une relation entre la dimension de l'espace engendré et la dimension de $\cap_i \ker \lambda_i$.

Exercice 3 — Soit $A \in M_n(k)$. On définit $\lambda_A \in M_n(k)^*$ par $\lambda_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que $\lambda : M_n(k) \to M_n(k)^*$, $A \mapsto \lambda_A$ est un isomorphisme.

2. Soit $f \in M_n(k)^*$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour tous (A,B). Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Exercice 4 — Soit k un corps et soit $E = k_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n sur k. On se donne $(a_1, \cdots, a_n)$ n éléments distincts de k et on note pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ $f_i : P \in E \mapsto P(a_i)$ la forme linéaire d'évaluation en a_i.

1. Montrer que (f_i) est une base de E^*.

2. Calculer la base de E dont elle est duale.

3. Dans le cas où $car(k) \neq 2$, étant donné un polynôme $Q \in E$, existe-t-il un polynôme $P \in E$ tel que $Q(x) = P(x) + P'(\frac{x}{2}) + ... + P^{(n-1)}(\frac{x}{2^n})$.

Transposition

Soit V et W deux espaces vectoriels, et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. On note ${}^t f$ la transposée de f, c'est-à-dire l'élément de $\mathrm{Hom}_k(W^*, V^*)$ donné par ${}^t f(\lambda) = \lambda \circ f$.

Exercice 5 — Montrer que $f \mapsto {}^t f$ est une application linéaire injective. En déduire qu'elle est bijective si V et W sont de dimension finie.

Exercice 6 — Soit $f : V \to W$ et $g : W \to H$ des applications linéaires entre les espaces vectoriels de dimension finie. Rappeler pourquoi on a ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$. En déduire que si f est un automorphisme linéaire de V, on a ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.

Exercice 7 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E^* son dual. On dispose d'un *accouplement* $<;> : E \times E^* \to k,\ < x; f > \mapsto f(x)$.

1. Montrer que $<;>$ est un accouplement parfait (i.e $<;>$ est k-linéaire en deux variables, et l'application induite $E \to Hom_k(E^*, k)$ qui envoie $x \in E$ sur $f : \lambda \mapsto \lambda(x)$ est un isomorphisme.

2. Montrer que si $f : E \to E$ est une application linéaire alors l'application ${}^t f : E^* \to E^*$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $x \in E$ et $\lambda \in E^*$, on ait $< f(x); \lambda > = < x; {}^t f(\lambda) >$.

Exercice 8 — Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \to W$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une famille finie $\{w\}$ d'éléments de W, et une famille finie d'éléments $\lambda_w \in V^*$, telles que $f = \sum_w \lambda_w w$.

2. Montrer que le rang de f est le nombre minimal d'éléments w nécessaires pour une telle écriture.

3. Soit (w_i) une base de W, montrer qu'il existe une unique famille (λ_i) d'éléments de V^* telle que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.

4. Montrer qu'avec ces notations, l'image de ${}^t f$ est le sous-espace de V^* engendré par les λ_i.