TD3 : Formes bilinéaires

On fixe un corps k. Tous les espaces vectoriels considérés sont sur k, et de dimension finie. On rappelle que si $\phi : E \times F \to k$ est une forme bilinéaire, on peut lui associer deux applications linéaires :
— $l_\phi : E \to F^*, x \mapsto (y \mapsto \phi(x,y))$;
— $r_\phi : F \to E^*, y \mapsto (x \mapsto \phi(x,y))$.

Exercice 1 — Soit $\phi \in \mathrm{Bil}(E,F)$. On note $E' = E/\ker l_\phi$ et $F' = F/\ker r_\phi$, et π_E et π_F les projections canoniques.

1. Démontrer la proposition vue en cours : *Il existe un unique $\phi' \in \mathrm{Bil}(E',F')$ tel que pour tous $(x,y) \in E \times F$, on a $\phi(x,y) = \phi'(\pi_E(x), \pi_F(y))$. De plus, ϕ' est non-dégénérée.*

2. en déduire que $\dim(E') = \dim(F')$.

Exercice 2 — Soit E un k-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique.

1. Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E, montrer $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

2. Si de plus ϕ est non-dégénérée, montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Exercice 3 — Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\phi : M_2(k) \times M_2(k) &\to k \\ (A,B) &\to \det(A+B) - \det(A-B)\end{aligned}$$

est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4 — Soit $E = K^2$ et ϕ la forme bilinéaire sur E définie par $\phi(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

1. Trouver la matrice A de ϕ dans la base $B = ((1,0),(1,1))$.

2. Trouver la matrice A' de ϕ dans la base $B' = ((2,1),(1,-1))$.

3. Trouver la matrice de passage P de B à B', et vérifier que $A' = {}^tPAP$.

Exercice 5 — Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ et ϕ l'application

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\to \mathbb{C} \\ (A, B) &\to n\,\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B). \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire sur E.

2. Soit $U \subset E$ le sous-espace des matrice de trace nulle. Montrer que ϕ est dégénérée, mais $\phi_{|U}$ est non-dégénérée.

3. Soit $V \subset E$ le sous-espace des matrices A telles que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et ${}^t\overline{A} = -A$. Montrer que $\phi_{|V}$ est définie négative, i.e. pour tout $A \in V \setminus \{0\}$, $\phi(A, A) < 0$.

4. Calculer $E^{\perp}$ et déterminer sa dimension.

Exercice 6 — Soit $M \in Mat_n(\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$. Considérons l'application $\mathcal{L} : Mat_n(\mathbb{R}) \times Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{L}(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAMB)$.

1. Vérifier que $\mathcal{L}$ est une application bilinéaire.

2. Trouver les conditions suffisantes et nécessaires sur la matrice M pour que $\mathcal{L}$ soit symétrique.

Exercice 7 — Soit E un k-espace vectoriel, avec $car(k) \neq 2$. Montrer que $q : E \to k$ est une forme quadratique si et seulement si $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour tous $\lambda \in k, x \in E$ et $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Exercice 8 — Soit $f \in n - \mathrm{Lin}(V \times V \times \ldots.. \times V; k)$ une application multilinéaire. Fixons $n - 1$ vecteurs $\{a_1; \ldots.a_{n-1}\}$ de V et notons W_f le sous-espace vectoriel de V^* engendré par les applications de la forme η_i : $x \mapsto f(a_1; \ldots.; a_{i-1}; x; a_i; \ldots a_{n-1})$. Maintenant regardons D_f le sous-espace de $n - \mathrm{Lin}(V \times V \times \ldots.. \times V; k)$ engendré par les applications de la forme :

$$\begin{aligned} \phi_1 \times \phi_2 \times \ldots \times \phi_n : V \times \ldots \times V &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots.x_n) &\to \prod_i \phi_i(x_i), \end{aligned}$$

où $\phi_i \in W_f$. Montrer que $f \in D_f$.