ÉNS de Lyon 2017-2018

Algèbre 1 L3

# TD4 : Formes quadratiques, adjoints

Dans tout le TD, les espaces vectoriels sont considérés sur un corps $K$ de caractéristique différente de 2.

**Exercice 1** — Soit $q$ une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel $E$, de forme polaire $\phi$, et soit $u \in L(E)$. Montrer que $\ker(u) = (\mathrm{im}(u^*))^\perp$.

**Exercice 2** —[Algorithme de Gauss] Appliquer l'algorithme de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{R}^4$.
3. La forme quadratique déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 3** — Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$.

1. Calculer la dimension de $\mathcal{Q}(E)$.
2. On suppose $E$ de dimension 3 et l'on en fixe cinq vecteurs $x_1, \ldots, x_5$. Montrer qu'il existe $q \in \mathcal{Q}(E), q \neq 0$ telle que $q(x_k) = 0$ pour tout $k$.

**Exercice 4** — Considerons la fonction $q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definie par $A \mapsto det(A)$.

1. Vérifier que $q$ est une forme quadratique.
2. Détermier son cône isotrope. Quel est son rang?
3. Soit $F$ le sous $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices de trace nulle. Déterminer $F^\perp$.
4. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$ ?

**Exercice 5** —[Identité du parallélogramme] Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $q : E \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x, y \in E, q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y)).$$

On pose pour $x, y \in E, b(x, y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$.

1. Montrer que $b$ est symétrique.

2. Montrer que $b$ est additive à droite, i.e. que
$$\forall x, y, z \in E, b(x, y+z) = b(x, y) + b(x, z).$$
On pourra appliquer la formule de départ aux couples $(x, y+z), (x+y, z), (x+z, y)$ et $(y, z)$.

3. Montrer que $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$.

4. Montrer que $b$ est bilinéaire et que $q$ est une forme quadratique.

**Exercice 6** —[Fonctions dont la forme polaire est bilinéaire] On s'intéresse aux fonctions $q : E \to K$ telles que $b_q : (x, y) \mapsto \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ soit une forme bilinéaire sur $E$. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{F}_2(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, K)$ et que $u : q \mapsto b_q$ est une application linéaire de celui-ci vers $S_2(E)$.

2. Montrer que $\mathcal{F}_2(E)$ contient toutes les formes quadratiques sur $E$ ainsi que les morphismes de groupes de $E$ dans $K$.

3. Montrer que $\mathcal{F}_2(E) = \mathcal{Q}(E) \oplus \mathrm{Hom}(E, K)$.

4. En particulier, montrer que si $K = \mathbf{Q}$ et que $E$ est de dimension finie, alors $\mathcal{F}_2(E)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $E$, de degré inférieur ou égal à 2 et qui s'annulent en $0_E$.

**Exercice 7** —[Cône isotrope]

Soit $q$ une forme quadratique sur le $K$-espace vectoriel $E$. On note $C(q)$, appelé cône isotrope, l'ensemble des vecteurs isotropes de $q$.

1. Montrer que $C(q)$ est stable par multiplication scalaire, mais pas forcément par addition.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, q \subset C(q)$ mais qu'on n'a pas forcément égalité.

3. Si $C(q) \neq \mathrm{Ker}\, q$, montrer que $q$ est surjective dans $K$. Donner ensuite un contre-exemple.

4. Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $K^n$ ne contient pas de vecteur isotrope non nul si et seulement $F \oplus F^{\perp} = E$.

5. Montrer que si $C(q) \neq \{0\}$ et $q$ est non dégénérée, alors $\mathrm{Vect}(C(q)) = E$.