TD5

Dans tous les énoncés, les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Exercice 1 — Déterminer les signatures et les rangs des formes quadratiques réelles suivantes.

1. $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

2. $f(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

3. $f(A) = \mathrm{Tr}(A)^2$.

4. $f(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 — Soit f la forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^{n+1}$, définie comme suit :

$$f(x_0; x_1; ...; x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

On dit qu'un sous espace de H de $\mathbb{R}^{n+1}$ est elliptique (resp. hyperbolique, resp. parabolique) si la restriction $f|_H$ est définie négative (resp. de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$, resp. isotrope). Montrer que :

1. si F est de dimension au moins 2 et si il existe $x \in F$ tel que $f(x) > 0$, alors F est hyperbolique ;

2. si F est elliptique de dimension au plus $n-1$, alors $F^\perp$ est hyperbolique ;

3. si F est parabolique, alors $f|_F$ est de rang $\geq \dim F - 1$.

Exercice 3 — Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous $P, Q \in E$, on définit :

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt$$

et on pose $f(P) = B(P, P)$.

1. Montrer que B est bien une forme bilinéaire.

2. La forme f a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?

3. Calculer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de E.

4. Déterminer la signature de f lorsque $n = 2$. La forme est-elle positive ?

5. Trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport à f.

Exercice 4 —[Signature d'une forme quadratique sur un corps fini]

Soit p un nombre premier >2, et $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p^\times$ qui n'est pas un carré.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{F}_p^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a toujours des solutions dans $\mathbb{F}_p$.

(Indication : Il y a exactement $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$).

2. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension 2 est isomorphe à une forme quadratique donnée par la matrice I_2 ou $\mathrm{Diag}(1, \alpha)$.

3. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{F}_p-$espace vectoriel de dimension n est isomorphe à une forme quadratique donnée par la matrice I_n ou $\mathrm{Diag}(1, ...1, \alpha)$.

Exercice 5 — Soit E, F, G trois k-espaces vectoriels. En utilisant la propriété du produit tensoriel, montrer qu'un élément $x \otimes y \in E \otimes F$ est nul si et seulement si pour toute forme bilinéaire $f : E \times F \to k$, on a $f(x, y) = 0$. En déduire que si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une famille libre de E et $y \in F$, alors $\sum_i x_i \otimes y = 0$ si et seulement si $y = 0$.
Trouver un exemple d'application $h : E \otimes F \to G$ telle que $h(x \otimes y) \neq 0$ pour tout $x \otimes y \in E \otimes F$ et qui, pourtant, n'est pas injective.

Exercice 6 — On rappelle l'isomorphisme défini en cours $\psi : E^* \otimes F \to Hom_k(E, F)$ envoyant $e \otimes f$ sur l'application $\psi(e \otimes f)(x) = e(x).f$ pour tout $e \in E^*; f \in F; x \in E$.

Montrer que le rang de $u = \psi(t)$ est le plus petit entier r tel que t puisse s'écrire comme somme de r tenseurs simples. En particulier, u est l'image d'un tenseur simple si et seulement si u est de rang 1.

Exercice 7 — Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer les identités suivantes :

1. $E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$

2. $n - Lin(E \times E \times ... \times E; k) \cong \otimes_n E^*$

3. $\mathbb{R}_n[X] \otimes \mathbb{R}_n[Y] \cong \mathbb{R}_n[X, Y]$, où $\mathbb{R}_n[X, Y]$ est l'espace de polynômes en deux variables de degré plus petit ou égal à n.