ÉNS de Lyon — Algèbre 1

2017-2018 — L3

TD6 : Groupes - le début

Exercice 1 — Soit G un groupe et H un sous-groupe et G d'indice 2. Montrer que $H \triangleleft G$.

Exercice 2 — Soit G un groupe abélien simple . Montrer que G est fini et puis isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$ premier. Que se passe-t-il dans le cas G n'est plus abélian mais simple et fini ?

Exercice 3 — Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G. Notons $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle. À quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 — Soit π la projection naturelle du groupe additif $\mathbb{R}^2$ sur son quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$. À quelle condition l'endomorphisme f passe-t-il au quotient, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de groupes $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ tel que $\overline{f} \circ \pi = \pi \circ f$?

Exercice 5 — À l'aide d'une application bien choisie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$, montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{S}^1 : \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$.

Exercice 6 — [Normalisateur et action par conjugaison]

Si un groupe G agit sur un ensemble X, le *stabilisateur* d'un élément $x \in X$ est l'ensemble $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G\ ;\ g.x = x\}$.

1. Montrer que l'application $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ définit une action du groupe G sur l'ensemble de ses sous-groupes.

2. Quel est le stabilisateur d'un sous-groupe de G pour cette action ?

3. Dans cette question, on suppose G fini. Montrer que le nombre de sous-groupes conjugués à un sous-groupe H est égal à l'indice de N_H dans G.

4. Montrer que deux sous-groupes conjugués ont des stabilisateurs conjugués.

Exercice 7 — Soit G un groupe et soit A un sous-groupe distingué abélien.

1. Montrer que le groupe quotient G/A opère sur A par conjugaison.

2. En déduire un homomorphisme de G/A dans le groupe $\mathrm{Aut}(A)$.

Exercice 8 —[Morphismes entre les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$] Soient m et n deux entiers naturels non nuls, avec $\pi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\pi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ les projections canoniques.

(a) Montrer qu'un morphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ se factorise en $f = \overline{f} \circ \pi_n$ si et seulement si $n \cdot f(1) = 0$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(b) En déduire quels sont les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et leur nombre, en fonction de m et n.

Exercice 9 — Soit G un groupe fini de cardinal N et soit p le plus petit facteur premier de N. Montrer que tout sous group d'indice p est distingué.[On voit donc en particulier que un sous group d'indice 2 d'un groupe fini est distingué]

Exercice 10 —Soit G un groupe, on dit que deux sous group de H, L de G sont commensurable si leur intersection $H \cap L$ est d'indice finie dans H et dans L. Montrer que la commensurabilité est une relation équivalente.

Exercice 11 — Soit G un groupe, et notons Z son centre (i.e $Z := \{z \in G | \forall x \in G; xz = zx\}$). Montrer que si le quotient G/Z est monogène (i.e engendre par un seul élément), alors G est abélien.