ÉNS Lyon Algèbre 1
L3 2017-2018

TD 7 : Actions de groupes, théorèmes de Sylow

Exercice 1. Soit p un nombre premier

1. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.
2. Déterminer le nombre d'élements d'ordre p dans un groupe de cardinal p^2 .

Exercice 2. Soit G un groupe infini , admettant un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple.[1]

Exercice 3. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E.

1. On suppose que G agit sans point fixe, et que $|G| = 15$, $\mathrm{Card}(E) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et la longueur de chacune.
2. Montrer que si $|G| = 33$ et $\mathrm{Card}(E) = 19$, alors il existe un point fixe.

Exercice 4.

1. Soit G le groupe des isométries préservant un triangle équilatéral dans le plan. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
3. Montrer que le groupe des isométries préservant un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. On pourra utiliser le fait que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5. [Exemples de Sylow]

1. Soit p un nombre premier. Trouver tous les p-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 200.
3. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20 ?
4. Trouver tous les sous-groupes de Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
5. Soient G un groupe et p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que l'intersection d'un p-Sylow de G avec un q-Sylow de G est triviale.
6. Soient G un groupe et H un p-sous-groupe de G qui est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans tout p-Sylow de G.
7. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G qui contient un p-Sylow de G. Montrer que N possède autant de p-Sylow que G.

Exercice 6. [Applications du théorème de Sylow]

1. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que soit G possède un 3-Sylow distingué, soit G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
2. Soit G un groupe d'ordre 56. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
3. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que G possède soit un 5-Sylow distingué soit un 7-Sylow distingué.
4. Soit G un groupe d'ordre 351. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
5. Soit G un groupe d'ordre 340. Montrer que G possède un sous-groupe cyclique distingué d'ordre 85.

1. Rappelons qu'un groupe est dit **simple** s'il ne contient aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

6. Soit G un groupe d'ordre 48. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16.
7. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Calculer le nombre d'éléments d'ordre 7.

Exercice 7. Soit G un groupe fini.

1. Si H un sous groupe strict de G. Montrer que la réunion des conjugés de H ne recouvre pas G.
2. Montrer que si G agit transitivement sur un ensemble X de cardinal > 1, alors il existe un élément de G qui agit sans point fixe.