ÉNS de Lyon Algèbre 1
2017-2018 L3

TD8

Exercice 1 —

1. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ est engendré par (1 2 3 4) et (1 2).
2. Montrer que le groupe $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple.
3. Déterminer les groupes dérivés de $\mathfrak{A}_n$ et de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 2 — Soit n un entier strictement positif. Soit G un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$. On se propose de montrer que si G agit transitivement sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et que G contient une transposition et un p-cycle, (où p est premier et strictement supérieur à $n/2$), alors $G = \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $a, b \in \{1, 2, ..., n\}$, on écrit $a \sim b$ si $a = b$ ou si $a \neq b$ et que la transposition (a, b) appartient à G . Montrer que " $\sim$ " est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si $g \in G$ et $a \sim b$, alors $g(a) \sim g(b)$.
3. Montrer que toutes classes d'équivalence pour $\sim$ ont le même cardinal r, et que $r \geq 2$.
4. Soit s le nombre de classes d'équivalence pour $\sim$. Montrer que $n = r.s$ et $r \geq p$, puis conclure.

Exercice 3 — Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe T de $\mathfrak{S}_n$ est dit *transitif* si son action sur $\{1, 2, ..., n\}$ est transitive.

1. Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$.
2. Que dire des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_p$ pour p premier ?.
3. On note H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par (1 2 3 4) et (1 3). Expliquer pourquoi H est d'ordre 8.
4. Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.
5. Soit G un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_4$ dont l'ordre est un diviseur de 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés à la question 4.
6. Déterminer, à conjugaison près, tous les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 4 —[Groupes d'automorphismes de $\mathfrak{S}_n$]

On rappelle que si G un groupe quelconque, le groupe des isomorphismes de G vers lui-même est noté $Aut(G)$ et on note $Int(G)$ le sous-groupe de $Aut(G)$ engendré par les isomorphismes *intérieurs*, c'est-à-dire de la forme $i_g : a \mapsto gag^{-1}$.
Soit $n \geq 1$.

1. Soit $\alpha \in Aut(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que si α envoie une transposition sur une transposition, alors $\alpha \in Int(\mathfrak{S}_n)$.
2. Soit T_k l'ensemble des produits d'exactement k transpositions à supports disjoints. Montrer que T_k est une classe de conjugaison et calculer son cardinal.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $Int(\mathfrak{S}_n) = Aut(\mathfrak{S}_n)$.
4. Montrer que si $\beta \in Aut(\mathfrak{A}_n)$ et que β envoie les 3-cycles sur les 3-cycles, alors il existe $\alpha \in Int(\mathfrak{S}_n)$ tel que la restriction de α à $\mathfrak{A}_4$ soit β.

Partie II [Représentations de groupes]

Soit G un groupe fini. On dit qu'une représentation $\rho : G \to GL(V)$ est *irréductible* si il n'existe pas de sous-espace non trivial de V qui soit stable par $\rho(G)$.

Exercice 5 — Soit G un groupe fini abélien. Montrer que si (ρ, V) est une représentation irréductible de G, alors V est de dimension 1.

Exercice 6 — Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et $\rho : G/H \to GL_n(\mathbb{C})$ une représentation de G/H. Notons π la projection canonique $G \to G/H$.

1. Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
2. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 7 — Soit G un groupe fini de cardinal n. Notons W l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, muni d'une base qu'on notera $\{e_g\}_{g \in G}$. Définissons la fonction $\theta : G \to W$ par $\theta(g)(e_{g'}) = e_{gg'}$.

1. Vérifier que θ est une représentation de G. On dit qu'une telle représentation est *régulière*.
2. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G. Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que l'ensemble $\{\rho(g)(v) \mid g \in G\}$ forme une base de G. Montrer qu'on peut alors trouver une base de V telle que ρ soit la représentation régulière associée à cette base.