ÉNS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2017-2018

TD 9 : Représentations de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe. Montrer que si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1, alors G est abélien.

Exercice 2. [Représentations de $\mathfrak{S}_3$]

Soit (V, ρ) une représentation complexe $\mathfrak{S}_3$. Notons $\tau = (12)$ et $\sigma = (123)$ dans $\mathfrak{S}_3$.

1. Notons respectivement V_0, V_1 et V_2 les espaces propres de $\rho(\sigma) \in GL(V)$ pour les valeurs propres $1, j$ et j^2 (où $j \in \mathbb{C}$ est une racine primitive troisième de l'unité). Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est égal à la somme directe $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.
2. Montrer que V_0 est stable sous l'action de τ, que $\tau \cdot V_1$ est inclus dans V_2 et que $\tau \cdot V_2$ est inclus dans V_1.
3. Montrer que pour tout $x \in V_1 \backslash \{0\}$, le sous-espace de V engendré par les vecteurs x et $\tau \cdot x$ définit une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de x.
4. En déduire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 3. [Caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$]

1. Soit V une représentation d'un groupe fini G, de caractère χ. Rappeler pourquoi $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ pour tout g dans G.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que le caractère associé à une représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est réel.
3. Montrer que les seuls caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$ sont le caractère trivial et la signature ε.

Exercice 4. [Représentations fidèles]

Une représentation ρ d'un groupe G est dite *fidèle* si ρ est injective. Supposons G fini.

1. Si (V, ρ) est une représentation fidèle de G, montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est G-linéaire si et seulement si $g \in Z(G)$.
2. Montrer que G admet une représentation fidèle.
3. Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Montrer que le noyau de V est constitué des $g \in G$ tels que $\operatorname{Tr} \rho(g) = \dim V$.
4. Montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle, son centre est cyclique.

5. Montrer que si H est distingué dans G et $(V, \overline{\rho})$ une représentation fidèle irréductible de G/H, la représentation (V, ρ) de G, définie par $\rho(g) = \overline{\rho}(\overline{g})$, est irréductible de noyau H.

Exercice 5. [Représentation fidèles et simplicité]

1. Soit G un groupe fini. Montrer que G a au moins une représentation fidèle.
2. Montrer que tout sous-groupe distingué H peut s'écrire comme intersection de noyaux de représentations irréductibles de G.
3. En déduire que G est simple si et seulement si toutes ses représentations irréductibles non triviales sont fidèles.
4. Si G est fini, montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible $\chi \neq \mathbf{1}$ et pour tout $x \in G$, on a : $\chi(x) \neq \chi(1)$.

Exercice 6. [Un contre-exemple au théorème de Maschke si $k \neq \mathbb{C}$]

Notons $\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le morphisme de groupes défini par

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \rho(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Montrer que la représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ainsi définie n'est ni irréductible, ni somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 7. [Représentation de permutation]

Soit G un groupe fini agissant sur l'ensemble fini X. On appelle représentation de permutation associé à X la représentation sur l'espace vectoriel $V_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$ donnée par $\rho(g)(e_x) = e_{gx}$.

1. Soit $g \in G$, montrer que χ_{V_X} est le nombre de points fixes pour l'action de g sur X.
2. Montrer que $\frac{1}{\mathrm{Card}(G} \sum_{g \in G} \chi_{V_X}(g)$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X.
3. On suppose maintenant que X est de cardinal > 1 . Montrer que V_X n'est pas une représentation irréductible de G : on a une décomposition $V_X = \mathbf{1} \oplus W$, où $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale. On donnera une base de $\mathbf{1}$ et de W.
4. Calculer $\langle \chi_{V_X}, \chi_{V_X} \rangle$.
5. En déduire que W est irréductible si et seulement si X est de cardinal 2 ou G agit 2-transitivement sur X.