DM N°1

À rendre au plus tard le 27 février

Dans ce DM, tous les anneaux sont supposés unitaires commutatifs et unitaires.

Exercice 1. [Radical]
Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.
2. Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.
4. Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 2. Soit A un anneau. On dit que A est anti-noethérien si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. On admet le résultat suivant : si il existe $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ des idéaux maximaux d'un anneau A tels que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_n = 0$, alors A est noethérien si et seulement si A est anti-noethérien.

1. Montrer qu'un anneau anti-noethérien intègre est un corps, et plus généralement que tout idéal premier est maximal.
2. Soit A un anneau anti-noethérien. Montrer que le nilradical est nilpotent.
3. Soit A un anneau anti-noethérien. Montrer que A possède un nombre fini d'idéaux maximaux et que leur produit est nilpotent. (On utilisera le fait que le nilradical est l'intersection des idéaux premiers).
4. En déduire qu'un anneau anti-noethérien est noethérien. Inversement, montrer qu'un anneau noethérien dans lequel tout idéal premier est maximal est anti-noethérien.