TD n°10 : Extensions normales

Exercice 1. [Extensions normales : un exemple concret]
Soit P le polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que le polynôme P est irréductible.
   On note α une racine de P et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ le corps de rupture de P.
2. Vérifier que $\alpha^2 - 2$ est aussi racine de P.
3. En déduire que P est scindé sur K et que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est normale.
4. Déterminer le groupe $Aut(K/\mathbb{Q})$.

Exercice 2. Soit $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = 4$.
2. Montrer que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$ n'est pas normale, mais que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]/\mathbf{Q}$ le sont.
3. Montrer qu'en revanche $\mathbf{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$ est normale de degré 4 sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 3.

1. Montrer qu'une extension quadratique est normale.
2. Soient L/K une extension de corps et $(L_i)_{i\in I}$ une famille de sous-extensions normales. Montrer que l'intersection $\cap_{i\in I} L_i$ est une extension normale de K.
3. Soient K et K' deux sous-corps d'un corps L tels que les deux extensions L/K et L/K' sont normales et que l'extension $L/K \cap K'$ est algébrique. Montrer que l'extension $L/K \cap K'$ est normale aussi.

Exercice 4. Soient L/K et M/L deux extensions finies de corps.

1. Est-ce que L/K et M/L normales impliquent M/K normale ?
2. Est-ce que L/K et M/K normales impliquent M/L normale ?
3. Est-ce que M/K et M/L normales impliquent L/K normale ?

Exercice 5. [Factorisation d'un polynôme dans une extension]
Soient L/K une extension de degré m et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible unitaire de degré n. On note $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

1. Montrer que le degré de tout facteur irréductible de P dans $L[X]$ est un multiple de n/d, et que P possède au plus d facteur irréductibles dans $L[X]$. Que dire si $d = 1$?
2. Supposons que l'extension L/K est normale. Montrer que si P_1 et P_2 sont deux facteurs irréductibles de P dans $L[X]$, alors il existe un élément de $Aut(L/K)$ qui envoie P_1 sur P_2. En déduire que tous les facteurs irréductibles de P dans $L[X]$ ont le même degré. Quelle relation y a-t-il entre d et le nombre de tels facteurs irréductibles ?