ENS Lyon — Algèbre 2
L3 — 2017-2018

TD n°11 : Extensions séparables, extensions normales

Exercice 1. [Corps parfait]
Soient K un corps et $P \in K[X]$.

1. Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 0$, $P' = 0$ si et seulement si P est constant.
2. Montrer que si K est de caractéristique $p > 0$, alors $P' = 0$ si et seulement s'il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = Q(X^p)$. Un corps K est dit *parfait* si toute extension finie de K est séparable.
   (a) Montrer qu'un corps algébriquement clos est parfait.
   (b) Montrer qu'un corps de caractéristique nulle est parfait.
   (c) Montrer qu'un corps de caractéristique positive est parfait si et seulement si l'endomorphisme de Frobenius donné par $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme.
   (d) Montrer qu'un corps fini est parfait.
   (e) Montrer qu'une extension algébrique d'un corps parfait reste parfait.

Exercice 2. Soit q une puissance d'un nombre premier p, soit n un entier ≥ 1 et soient $L = \mathbb{F}_q(Y)$ et $K = \mathbb{F}_q(Y^n)$.

1. Montrer que si $p|n$, alors L/K est purement inséparable.
2. Montrer que si p est premier à n, alors L/K est séparable.
3. Montrer que L/K est normale si et seulement si $q \equiv 1 \mod n$.

Exercice 3. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer que $K^p = \{x^p : x \in K\}$ est un sous-corps de K tel que K/K^p est normale.

Exercice 4. Soit L/K une extension finie de corps.

1. Montrer que si tout élément de $L \setminus K$ est inséparable sur K (on dit que l'extension est *purement inséparable* ou *radicielle*), alors la caractéristique de K est un nombre premier p, que $[L : K]_s = 1$ et que $[L : K]$ est une puissance de p.
2. Montrer que dans le cas général, $[L : K]_s$ divise $[L : K]$ et que soit le quotient est 1, soit K est de caractéristique p et le quotient est une puissance de p.
3. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(L/K)$ est fini et que son cardinal divise $[L : K]_s$, et les deux coïncident si et seulement si l'extension est normale.
4. Si $M/L/K$ sont des extensions successives, montrer que $[M : K]_s = [M : L]_s \cdot [L : K]_s$.

Exercice 5. [Trace] Soit L/K une extension finie de corps. Pour $x \in L$, on note m_x l'endomorphisme K-linéaire de multiplication par x, et on définit la trace de x par $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \mathrm{Tr}(m_x)$. En particulier, $\mathrm{Tr} : L \to K$ est une application K-linéaire.

1. Calculer $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(x)$ pour $x = a + ib$ complexe.
2. Déterminer $\mathrm{Tr}_{L/K}(x)$ pour $x \in K$.
3. Si M/L est une extension de corps, montrer que $\mathrm{Tr}_{M/K} = \mathrm{Tr}_{L/K} \circ \mathrm{Tr}_{M/L}$.
4. Soit $x \in L$. Exprimer $\mathrm{Tr}_{L/K}$ en fonction des coefficients du polynôme minimal de x sur K.
5. On suppose que L/K n'est pas séparable. Montrer que $\mathrm{Tr}_{L/K}$ est identiquement nulle.
6. Si L/K est séparable, montrer que $\mathrm{Tr}_{L/K}$ n'est pas identiquement nulle et que $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur L.