ENS Lyon | Algèbre 2
L3 | 2017-2018

TD n°12 : Théorie de Galois

Exercice 1. Soient $x = \sqrt[3]{2}, j = e^{2i\pi/3}$ et $K = \mathbf{Q}[x, j]$.

1. Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne, de dimension 6, et que $Gal(K/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Expliciter la correspondance de Galois pour l'extension $K/\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Soit $P(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Montrer que P possède trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées.
3. On fixe désormais L un corps de décomposition de P, et on note $G = Gal(L/\mathbf{Q})$. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. En déduire la forme des sous-extensions galoisiennes de $L/\mathbf{Q}$.

Exercice 3. Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G. Si $x \in L$, on note $\mathrm{Stab}(x)$ le stabilisateur de x pour l'action de G sur L. Montrer que $L^{\mathrm{Stab}(x)} = K[x]$.

Exercice 4. Soient $p_1, \ldots, p_r$ des éléments de $\mathbf{Q}^*$, et $K = \mathbf{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}]$.

1. Montrer qu'on peut munir le groupe $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ d'une structure de $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, et que la famille $\overline{-1}, \overline{p}$, où p parcourt les nombres premiers, en est une base.
2. On suppose que les images de $p_1, \ldots, p_r$ dans $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ vu comme $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel sont indépendantes. Montrer que $[K : \mathbf{Q}] = 2^r$.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$ n'est pas entier pour $n \geq 2$.

Exercice 5. Soit $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, et soient $f = X^3 - (1 + \sqrt{2})$ et $g = X^3 - (1 - \sqrt{2})$. On désigne par α (resp. β) la racine réelle de f (resp. g) dans $\mathbb{C}$. On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha, j)$.

1. (a) Trouver un polynôme P de degré 6 à coefficients rationnels dont α soit racine.
   (b) Montrer que $k \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ et que $\mathbb{Q}(\alpha) = k(\alpha)$.
   (c) Exprimer β en fonction de α.
   (d) Soit $\omega = \alpha - \frac{1}{\alpha}$. Trouver un polynôme Q de degré 3 dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(\omega) = 0$ et montrer que Q est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Exprimer les autres racines de Q en fonction de j et ω.
   (e) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. (a) Montrer que $[L : \mathbb{Q}] = 12$.
   (b) Déterminer les douze $\mathbb{Q}$-automorphismes de L sur un sous-corps de $\mathbb{C}$.
   (c) Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne.