TD n°2 : Anneaux, morphismes d'anneaux, idéaux

Exercice 1. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image réciproque par φ d'un idéal de B est un idéal de A. Qu'en est-il pour un idéal premier ? Pour un idéal maximal ? Donner une condition sous laquelle l'image directe de tout idéal de A est un idéal de B.

Exercice 2. Soit A un anneau et soient I, J deux idéaux de A.

1. Décrire les idéaux (quelconques, puis premiers et maximaux) de l'anneau quotient A/I.
2. Donner un isomorphisme naturel entre l'anneau $A/(I+J)$ et un quotient de A/I.

Exercice 3. Soit A un anneau et soit $d \in A \setminus A*$ un élément non nilpotent. On note

$$A[\frac{1}{d}] = \{\frac{a}{d^n} : a \in A, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Frac}(A).$$

1. Montrer que tout idéal de $A[\frac{1}{d}]$ s'écrit sous la forme $IA[\frac{1}{d}]$, où I est un idéal de A.
2. En déduire que si A est principal, alors $A[\frac{1}{d}]$ l'est aussi.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$.

1. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $(a) = A$.
2. Montrer que a est un diviseur de b dans A si et seulement si $(b) \subset (a)$.
3. Supposons que A soit intègre.
   (a) Montrer que a et b sont associés dans A si et seulement si $(a) = (b)$.
   (b) Montrer que a est premier dans A si et seulement si (a) est un idéal premier de A.
   (c) Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A. En déduire que lorsque A est principal, a est irréductible dans A si et seulement si (a) est un idéal maximal de A.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif.

1. Soient I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les idéaux I^n et J^n sont premiers entre eux.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que pour toute famille finie $\{I_1, \ldots, I_n\}$ d'idéaux de A vérifiant $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n \subset \mathfrak{p}$, il existe un entier $k \in \{1, \ldots n\}$ tel que $I_k \subset \mathfrak{p}$.
3. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers de A. Supposons que I soit un idéal de A contenu dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que I soit inclus dans $\mathfrak{p}_k$.
4. Soit I un idéal non premier de A. Montrer qu'il existe des idéaux $I_1 \neq I_2$ de A distincts de I et de A tels que l'on ait $I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.

Exercice 6. Un *anneau local* est un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal.

1. Un corps est-il un anneau local ?
2. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) A est un anneau local ;

(b) le complémentaire de $A^\times$ dans A est un idéal de A ;

(c) pour tout élément $x \in A$, x ou $1-x$ est un élément inversible de A ;

(d) la somme de deux éléments non inversibles de A est encore un élément non inversible de A.

3. Montrer que le quotient d'un anneau local par un idéal propre est encore un anneau local.

Exercice 7. [Radical]

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.

(b) Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.

(c) Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.

(d) *(Bonus)* Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 8. [Spectre d'un anneau]

Pour tout anneau A, on note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des ses idéaux premiers. Pour tout idéal I de A et $V \subset \operatorname{Spec} A$, on note

$$\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | I \subset \mathfrak{p}\} \qquad \mathcal{I}(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}.$$

(a) Montrer que les fonctions $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$ sont décroissantes pour l'inclusion, et que pour tous idéaux I et J de A

$$\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

(b) Montrer que pour toute famille d'idéaux $(I_\alpha)_\alpha$ de A et I l'idéal engendré par leur union,

$$\mathcal{V}(I) = \cap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha).$$

(c) Montrer grâce à la question (d) de l'exercice précédent que pour tout idéal I de A,

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

(d) Dessiner $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$.