TD n°3 : Anneaux, idéaux suite

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. Soient X un espace topologique compact (i.e. quasi-compact et séparé) et $R = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues. Soit $\mu : X \to \operatorname{MaxSpec} R$ (où $\operatorname{MaxSpec} R$ est l'ensemble des idéaux maximaux de R) l'application qui à un point x de X associe l'idéal m_x des fonctions s'annulant en x.

1. Vérifier que m_x est bien un idéal maximal.
2. Montrer que μ est injective en utilisant le lemme d'Urysohn.
3. Soit m un idéal maximal de R. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $m = m_x$, et en déduire que μ est surjective.
   (*Indication : soit $V(m)$ l'ensemble des zéros communs des éléments de m, montrer que $V(m)$ est non-vide en utilisant la compacité de X.*)
4. Pour tout $f \in R$, on note $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ et $V_f = \{m \in \operatorname{MaxSpec} R | f \notin m\}$. Montrer que $\mu(U_f) = V_f$.

Exercice 2. [Théorème des restes chinois] Soit A un anneau, et soient I, J deux idéaux de A premiers entre eux.

1. Montrer que l'application $A/(I \cap J) \to A/I \times A/J$ donnée par
   $x \mod (I \cap J) \mapsto (x \mod I, x \mod J)$ est bien définie et est un isomorphisme.
2. En déduire que si $I_1, \cdots, I_n$ sont des idéaux de A deux-à-deux premiers entre eux, alors l'application $A/(I_1 \cdots I_n) \to A/I_1 \times \cdot \times A/I_n$ donnée par
   $x \mod (I_1 \cap \cdots \cap I_n) \mapsto (x \mod I_1, \cdots, x \mod I_n)$ est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 3. Un *anneau local* est un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal.

1. Un corps est-il un anneau local ?
2. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) A est un anneau local ;
   (b) le complémentaire de $A^\times$ dans A est un idéal de A ;
   (c) pour tout élément $x \in A$, x ou $1 - x$ est un élément inversible de A ;
   (d) la somme de deux éléments non inversibles de A est encore un élément non inversible de A.
3. Montrer que le quotient d'un anneau local par un idéal propre est encore un anneau local.

Exercice 4. [Radical]
Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.
2. Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.

4. *(Bonus)* Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\tilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.
3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?

Exercice 6. [Retour sur le radical] Soit A un anneau.

1. Soient $U \subset A$ un sous-ensemble stable par multiplication et I un idéal qui est maximal parmi les idéaux contenus dans $A \setminus U$. Montrer que I est un idéal premier.
2. En déduire une autre preuve de la question 4) de l'exercice 1.
3. Soit $J(A)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que pour tout $y \in A$, $1 + xy$ est inversible. Montrer que $J(A)$ est l'intersection des idéaux maximaux de A.
4. Montrer que $J(A/J(A)) = 0$.