TD n°4 : Anneaux noethériens

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Le sous anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôles sur le cercle $|z| = 1$.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
5. L'anneau des suites à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Généralités sur les anneaux noethériens]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau noethérien vérifie-t-il la même propriété ?
2. Supposons $A[X]$ noethérien. A est-il noethérien ?
3. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout élément s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 3. Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux pour l'inclusion.
3. *Bonus : en utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal.*

Exercice 4.

1. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout idéal s'écrit comme intersection finie d'idéaux irréductibles, où un idéal I est dit irréductible si $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$ ou $I = I_2$.
2. Soient A un anneau noethérien et I un idéal. On rappelle que $\sqrt{I}$ est l'idéal défini par $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n > 0, x^n \in I\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Exercice 5. [Dimension d'un anneau]

Sur un anneau A, une chaîne de longueur n est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

On appelle dimension de Krull la borne supérieure des longeurs de chaînes de A (pouvant être infinie).

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est de dimension 1, et que tout corps K est de dimension 0.
2. Montrer que pour tout corps K et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim K[X_1, \cdots, X_n] \geq n$. Trouver un anneau de dimension infinie.
3. Montrer que pour un idéal I de A, $\dim A/I \leq \dim A$.