

TD N°5 : ANNEAUX DE POLYNÔMES

**Exercice 1.** Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire.

1. Si  $a, b \in A$ , montrer que l'application  $A[X, Y] \rightarrow A$  donnée par  $P(X, Y) \mapsto P(a, b)$  est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que si  $A = \mathbf{Q}$ , alors tout morphisme  $\mathbf{Q}[X, Y] \rightarrow \mathbf{Q}$  est de cette forme.
3. Montrer que si  $A = \mathbf{C}$ , alors il existe un morphisme  $\mathbf{C}[X, Y] \rightarrow \mathbf{C}$  qui n'est pas de cette forme.
4. Décrire tous les morphismes d'anneaux  $A[X, Y] \rightarrow A$ .

**Exercice 2.** Soit  $(P, Q) \in K_n[X] \times K_m[X]$ .

On définit une application  $\varphi : K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X] \rightarrow K_{n+m-1}[X]$  en posant  $\varphi(U, V) = UP + VQ$ .

1. À quelle condition sur  $(P, Q)$  cette application est-elle bijective ?
2. Déterminer  $\mathfrak{S}(\varphi)$  en fonction du pgcd de  $P$  et  $Q$  et expliquer comment déterminer de façon générale le pgcd de deux polynômes par un algorithme.
3. Utiliser la méthode décrite à la question précédente pour déterminer le pgcd de  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$  dans  $K[X]$ .
4. Ecrire la matrice de l'application  $\varphi$  dans les bases  $((X^{m-1}, 0), \dots, (1, 0), (0, X^{n-1}), \dots, (0, 1))$  et  $(X^{m+n-1}, \dots, 1)$ . On appelle résultant de  $P$  et  $Q$  et on note  $\text{Res}(P, Q)$  le déterminant de cette matrice.
5. Si  $P \in K[X]$ , on appelle discriminant de  $P$ , noté  $\text{disc}(P)$  le résultant de  $P$  et de  $P'$ . Calculer le discriminant de  $P$  dans le cas où  $P$  est de degré 2 ou 3.

**Exercice 3.** [Multiplicité et dérivées] Soient  $K$  un corps,  $P$  un polynôme en une variable à coefficients dans  $K$ ,  $\alpha$  un élément de  $K$  et  $m$  un entier supérieur ou égal à 1.

1. On suppose que  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité supérieure ou égale à  $m$ . Montrer que  $\alpha$  annule les dérivées de  $P$  jusqu'à l'ordre  $m - 1$ .
2. Montrer que la réciproque n'est pas forcément vraie, et trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $K$  pour que la réciproque soit toujours vraie.

**Exercice 4.** Soit  $\alpha \in \mathbf{C}$  un nombre algébrique (c'est-à-dire une racine d'un polynôme non nul de  $\mathbf{Q}[X]$ ). Montrer que le noyau du morphisme  $\mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{C}$  défini par  $P(X) \mapsto P(\alpha)$  est un idéal principal.

**Exercice 5.** [Critère d'Eisenstein]

1. Soit  $A$  un anneau factoriel de corps des fractions  $K$  et soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in A[X]$  un polynôme à coefficients dans  $A$ . Supposons qu'il existe un élément irréductible  $p \in A$  tel que :
  - i)  $p$  ne divise pas  $a_n$  ;
  - ii) pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $p$  divise  $a_k$  ;
  - iii)  $p^2$  ne divise pas  $a_0$ .Montrer qu'alors  $P$  est irréductible dans  $K[X]$ , et qu'il l'est aussi dans  $A[X]$  si l'on suppose de plus que  $P$  est primitif.

2. Si  $p$  est un nombre premier, montrer l'irréductibilité dans  $\mathbb{Z}[X]$  du polynôme  $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ .
3. Soit  $K$  un corps de caractéristique  $\neq 2$ . Montrer que le polynôme  $\sum X_i^2 - 1$  est irréductible dans  $K[X_1, \dots, X_n]$ .
4. Soit  $K$  un corps de caractéristique  $\neq 3$ . Montrer que le polynôme  $X^3 + Y^3 - 1$  est irréductible dans  $K[X, Y]$ .

**Exercice 6.** Soit  $K$  un corps infini. Montrer que si  $P \in K[X, Y]$  est tel que  $\forall x, y \in K, P(x, y) = 0$  alors  $P = 0$ .