TD n°6 : Anneaux euclidiens et factoriels

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau factoriel est-il aussi factoriel ?
2. Montrer que si A est un anneau tel que $A[X]$ est principal, alors A est un corps. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ n'est pas factoriel.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien.
4. Trouver les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
5. Trouver tous les éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines de l'unité n-ièmes primitives, et on définit le n-ième polynôme cyclotomique

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in U_n} (X - \zeta) \in \mathbb{C}[X].$$

1. Montrer que le degré de $\Phi_n(X)$ est $\phi(n)$, l'indicatrice d'Euler de n.
2. Montrer que pour tout n on a
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X),$$
et en déduire la formule $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.
3. En déduire que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
4. Pour $n = p$ un nombre premier, calculer explicitement $\Phi_p(X)$ et montrer que celui-ci est irréductible.

Exercice 3.
1. Soient A un anneau et $S \subset A$ est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0. Notons E_S l'ensemble des idéaux disjoints avec S. Montrer que E_S est non-vide, et que tout élément maximal de E_S est un idéal premier.
2. Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier non-nul contient un élément premier.
3. Soit A un anneau factoriel. Montrer que A est principal si et seulement si tout idéal premier non-nul est maximal.

Exercice 4. [Équation de Mordell] Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation de Mordell $y^2 = x^3 - 2$.

1. Si A est un anneau factoriel et si a, b sont deux éléments de A premiers entre eux tels que $ab = c^n$ pour un certain $c \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe alors $u, v \in A^\times$ et $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = u\alpha^n$ et $b = v\beta^n$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation de Mordell. Montrer que $y + i\sqrt{2}$ et $y - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation de Mordell.

Exercice 5. Soient A un anneau noethérien et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers P de A tels que le cardinal A/P est inférieur ou égal à n.

1. Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que A est infini.
2. Soit I un idéal maximal parmi ceux tels que l'anneau A/I possède une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que I est premier.
3. En déduire que l'on peut supposer que A est intègre, et que tout quotient non trivial de A ne possède qu'un nombre fini de tels idéaux premiers.
4. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des éléments distincts de A et $p = \prod_{i<j}(a_i - a_j)$. Montrer que si P est un idéal premier qui ne contient pas p, alors $\#(A/P) > n$.
5. Conclure.