DM à rendre pour le 14/12

Attention ! La rédaction sera prise en compte dans la note finale

Exercice 1 - (Plus de fonction Gamma) :
On rappelle que la fonction Gamma d'Euler est définie pour $\Re(z) > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout z de partie réelle strictement positive,

$$\Gamma(z) = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} \mathrm{d}t$$

2. Montrer que le produit infini

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp^{-z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

converge sur $\mathbb{C}$ et définit une fonction entière.

3. Montrer que pour tout z de partie réelle strictement positive :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} f(z)$$

où γ est la constante d'Euler : $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln(N)$.

4. Montrer que la fonction $1/\Gamma$ trouvée se prolonge en une fonction entière dont les zéros sont exactement les entiers négatifs et sont simples. Retrouver alors le fait que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ sans zéros et avec des pôles simples sur les entiers négatifs.
5. En utilisant le produit infini, retrouver que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout z dans le domaine de définition de Γ.
6. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/k)\cdots\Gamma(z+(k-1)/k) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2-kz} \Gamma(kz).$$

7. Établir la formule des compléments

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.