Applications avancées de l'analyse complexe

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1. Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

1. Montrer que la suite $(|S_n(z)|^{1/n})_{n\geq 1}$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbf{C}$.
2. Montrer que si $z \in D$ vérifie $\sum a_k z^k \neq 0$, alors $\lim |S_n(z)|^{1/n} = 1$. Montrer que si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $\limsup |S_n(z)|^{1/n} \leq 1$, alors $z \in \overline{D}$.
3. En déduire le théorème de Jentzsch : pour tout nombre complexe ω de module 1, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_k$ et une suite de nombres complexes $(z_k)_k$, telles que pour tout k, z_k est un zéro de S_{n_k} et que $z_k \to \omega$.

Exercice 2. Soit f une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe. En considérant $z \mapsto \frac{f\circ f(z)-z}{f(z)-z}$, montrer que f est une translation.

1 Autour du théorème de Mittag-Leffler

Exercice 3 (Quelques développements de fonctions méromorphes)**.** Montrer les développements suivants en dehors des pôles :

1. $$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$
2. $$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}$$
3. $$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}$$
4. $$\frac{\pi^2}{z \sin \pi z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} (-1)^n \frac{z}{n(z-n)}.$$

Exercice 4. Construire une fonction méromophe sur $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les entiers supérieurs à 1, simples et de résidu tous égaux à 1.