Révisions

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1 (Théorème de Phragmén-Lindelöf). 1. La fonction e^z sur la région $U = \{\Re\text{é}(z) \geq 0\}$ vérifie-t-elle le principe du maximum sous la forme : si $|f(z)| \leq C$ pour $z \in \partial U$ alors $|f(z)| \leq C$ pour tout $z \in U$?

2. Soit $\beta \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ et

$$S = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}_+^* \;\middle|\; \theta \in]-\frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\beta}[\right\}.$$

Soit f une fonction continue sur $\overline{S}$ et holomorphe sur S telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \partial S$, et

$$|f(z)| \leq Ce^{c|z|^\alpha}, \quad \text{pour tout } z \in S$$

pour $c, C > 0$ et $0 < \alpha < \beta$. Montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in S$.

Exercice 2 (Théorème des trois cercles d'Hadamard). Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant la couronne $C = \{z \in \mathbf{C};\ r \leq |z| \leq R\}$, où $r < R$ sont deux réels strictement positifs. Pour $\rho \in [r, R]$, on note

$$M(\rho) = \sup\{|f(z); |z| = \rho\}.$$

Pour la suite de l'exercice, on fixe $\rho \in [r, R]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que $\rho = r^\theta R^{1-\theta}$.
2. Montrer que, pour tous $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$

$$\rho^p M(\rho)^q \leq \max(r^p M(r)^q, R^p M(R)^q).$$

3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on a

$$\rho^\alpha M(\rho) \leq \max(r^\alpha M(r), R^\alpha M(R)).$$

4. En déduire que $M(\rho) \leq M(r)^\theta M(R)^{1-\theta}$.
5. Interpréter en termes de fonctions convexes.

Exercice 3 (Fonctions de type exponentiel). On dit qu'une fonction entière est de *type exponentiel* s'il existe une constante C telle que $f(z) = O(e^{C|z|})$ quand $|z|$ tend vers l'infini. La borne inférieure des nombres C vérifiant cette propriété s'appelle le *type* de la fonction f.

1. Montrer que les fonction $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto \sin(z)$ sont de type exponentiel 1.
2. Soit $C > 0$ et soit f une fonction entière de type exponentiel inférieur strict à C. On note c_n les coefficients de Taylor de f.
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tels que $|c_n| r^n \leq Ae^{Cr}$ pour tout $r \geq 0$.
   (b) En déduire que $c_n = O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$.
3. Réciproquement, soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ dont les coefficients vérifient $c_n = O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$. Vérifier que f est exponentiel de type inférieur ou égal à C.
4. Redonner une démonstration du petit théorème de Picard pour les fonctions de type exponentiel.