Premières formules de Cauchy - Homographies - Biholomorphismes du disque

S. Allais, L. Poyeton

1 Formule de Cauchy pour les séries entières

Exercice 1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$.

1. Montrer que pour tout $0 < r < \mathcal{R}$,
$$\int_{\partial D(0,r)} f(z)\mathrm{d}z = 0 = \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,(r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\right).$$
2. Montrer que pour tout $0 < r < \mathcal{R}$ et $n \geq 0$,
$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \quad \left(= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{\mathrm{i}\theta})}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right).$$
3. Montrer que si f est bornée de rayon de convergence infini, alors elle est constante (théorème de Liouville).
4. En déduire que tout polynôme complexe non constant admet une racine.
5. On suppose que f a un rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
6. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que f se prolonge en une fonction continue sur le disque unité fermé et que
$$\exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \exists \theta > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \alpha+\theta] \quad f(e^{it}) = 0.$$
Montrer que f est nulle.

2 Homographies

Exercice 2. On pose $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ où ∞ est un élément quelconque hors de l'ensemble $\mathbf{C}$. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{C})$, on note $h_A : \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ la fonction définie comme suit :

— Dans tous les cas autres que les cas ci-dessous, $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$;
— $h_A(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$, et ∞ si $c = 0$;
— Si $cz + d = 0$, $h_A(z) = \infty$.

Ces fonctions sont appelées *homographies*.

1. Montrer que pour tout choix de matrice $A \in GL_2(\mathbf{C})$ et tout $z \in \mathbf{C}$, si $cz + d = 0$, alors $az + b \neq 0$. En déduire que pour toute $A \in GL_2(\mathbf{C})$ et toute suite complexe (z_n) telle que $(z_n) \to z_\infty \in \overline{\mathbf{C}}$, on a $h_A(z_\infty) = lim_{n\to\infty} h_A(z_n)$.
2. Montrer que pour toutes $A, B \in GL_2(\mathbf{C})$, $h_A \circ h_B = h_{AB}$.
3. On note Möb($\mathbf{C}$) l'ensemble des homographies. Montrer que Möb($\mathbf{C}$) est un groupe isomorphe à $SL_2(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ (on note $PSL_2(\mathbf{C}) := SL_2(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$).
4. Montrer que Möb($\mathbf{C}$) est exactement 3-transitif sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que si (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) sont des triplets d'éléments distincts de $\overline{\mathbf{C}}$, il existe une unique homographie f telle que $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ et $f(z_3) = w_3$.
5. Soit $A \in SL_2(\mathbf{C})$. Montrer que $h_A(\mathbf{R} \cup \{\infty\}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ si et seulement si $A \in SL_2(\mathbf{R})$.
6. Soit $A \in SL_2(\mathbf{C})$. On considère le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Montrer que $h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ si et seulement si $A \in SL_2(\mathbf{R})$ (on pourra utiliser la question précédente).

3 Biholomorphismes

Exercice 3. Un biholomorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ vers un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ est un holomorphisme bijectif $h : U \to V$ d'inverse bijectif. On notera $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$.

1. On considère la fonction définie sur le disque unité ouvert complexe :
   $T_w : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tel que $T_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z}$, où $w \in \mathbb{D}$.
   (a) Montrer que T_w est un holomorphisme à valeurs dans $\mathbb{D}$
   (b) Montrer que $T_w \circ T_w$ est l'identité, en déduire que T_w est un biholomorphisme du disque (sous-entendu vers lui-même) échangeant 0 et w.
   (c) Montrer que le groupe des biholomorphismes du disque est transitif.
2. On considère à présent la fonction $h : \mathbb{H} \to \mathbf{C}$ telle que $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pour $z \in \mathbb{H}$.
   (a) Montrer que h réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{D}$.
   (b) En utilisant la dernière question de l'exercice précédent, montrer que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ admet un sous-groupe isomorphe à $PSL_2(\mathbf{R})$.
   (c) En considérant la conjugaison $f \mapsto h \circ f \circ h^{-1}$, montrer que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$ contient un sous-groupe isomorphe à $PSL_2(\mathbf{R})$. On déduira de la démonstration l'isomorphisme de groupe suivant :

$$PSL_2(\mathbf{R}) \simeq PSU_{1,1}(\mathbf{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ inversible avec } a, b \in \mathbf{C} \right\} \Big/ \mathbf{C}^* \mathrm{Id}$$