Intégrales sur des chemins, inégalités et formules de Cauchy

S. Allais, L. Poyeton

1 Intégrales sur des chemins

Exercice 1. 1. Soit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, prouver que pour toute fonction g continue sur $\partial D_1(0)$ on a

$$\overline{\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{g}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

2. Soit P un polynôme complexe, $z_0 \in \mathbf{C}$, $r > 0$. Montrer que

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \overline{P(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i r^2 \overline{P'(z_0)}.$$

2 Applications des formules de Cauchy

Exercice 2 (Calculs d'intégrales)**.** Après avoir justifié leurs existences, calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(i+t)^2}$$

2. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

   indication : intégrer $\frac{e^{iz}}{z}$ sur le bord du domaine $\{r \leq |z| \leq R, \Im\mathrm{m}\,(z) \geq 0\}$.

3. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) Pour $\xi \in \mathbf{R}$,

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x}\mathrm{d}x$$

   Indication : intégrer $e^{-\pi z^2}$ sur le bord du domaine rectangulaire de sommets (dans l'ordre) $-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$ avec $R > 0$; on utilisera aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ et $f : \Omega \to \Omega$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = z_0$.

1. Montrer que $|f'(z_0)| \leq 1$.
2. On suppose $f'(z_0) = 1$. Montrer que $f = Id$.
   Indication : écrire $f(z_0 + z) = z_0 + z + a_n z^n + o(z^n)$ avec $a_n \neq 0$.

Exercice 4 (Autour du théorème de Liouville)**.** Soit f holomorphe sur $\mathbf{C}$.

1. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
2. On suppose que f est non constante. Montrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.