**Indice et fonctions holomorphes**

S. Allais, L. Poyeton

# 1 Indice

**Exercice 1.** Soit $\gamma(t) = (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

1. Calculer $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$
2. Dessiner $\gamma$ et vérifier visuellement son résultat.

**Exercice 2.** Soit $\gamma$ un lacet dans $\mathbf{C}^*$. Notant $g(z) = z^n$, montrer que $\mathrm{Ind}_0(g \circ \gamma) = n\,\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.

**Exercice 3** (Indice et degré)**.** Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non constante et $z_0 \in U$.

1. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, l'indice $\mathrm{Ind}_0(f(\partial\Delta(z_0, r)))$ est bien défini et indépendant de $r$, on le note $i_{z_0}(f)$.
2. Montrer que $i_{z_0}(fg) = i_{z_0}(f) + i_{z_0}(g)$, si $g$ est une autre fonction holomorphe non constante.
3. Montrer que $i_{z_0}(f) = \deg_{z_0}(f)$.

**Exercice 4.** Soit $\gamma(t)$ un chemin dans $\mathbf{C}^*$. On suppose que $\gamma$ n'intersecte $\mathbf{R}_-$ qu'en un nombre fini d'instants $t_1, \ldots, t_n$, et que $\gamma$ *traverse* $\mathbf{R}_-$ en chacun des $t_i$, c'est-à-dire que $\Im(\gamma(t))$ change de signe au voisinage de $t_i$ ; on dira que la traversée est positive (resp. négative) si $\Im(\gamma(t) < 0$ (resp. $> 0$) sur $]t_i, t_i + \epsilon[$.

1. Montrer que $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$ est égal au nombre de traversées comptées avec signe.
2. Dessiner un lacet compliqué et "calculer" l'indice du lacet par rapport à chaque point du complémentaire du lacet. Observer l'efficacité de la formule ci-dessus.

**Exercice 5** (Indice et existence de logarithme)**.** Soient $U$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbf{C}^*$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Un logarithme de $f$ (sur $U$) est une fonction holomorphe $g : U \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $e^g = f$ (en particulier, un logarithme de $\mathrm{id}_U$ est un logarithme sur $U$ dans le sens usuel). Un racine $n$-ième de $f$ (sur $U$) est une fonction holomorphe $g : U \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $g^n = f$.

1. Montrer qu'il existe un logarithme de $f$ sur $U$ si, et seulement si, pour tout lacet $\gamma$ de $U$, $\mathrm{Ind}_0(f \circ \gamma) = 0$.
2. De façon analogue, donner une condition nécessaire et suffisante à ce que $f$ admette une racine $n$-ième.
3. Trouver un domaine (le plus grand possible) sur lequel la fonction
$$z \mapsto \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$
admet une branche holomorphe [1].

1. c'est-à-dire, sur lequel il existe $f$ holomorphe telle que $f(z)^2 = (z-a)(z-b)(z-c)$

# 2 Prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ à $\mathbb{C}$

**Exercice 6.** On définit les nombres de Bernoulli $B_n$ par l'identité :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

valable sur un voisinage épointé de 0.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$ impair, on a $B_n = 0$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ ?
3. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z + 2n - 1}$$
converge localement normalement uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -3, -5, \ldots\}$.
4. Montrer que pour tout $z$ tel que $\Re\text{é}(z) > 2$, on peut écrire
$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z + 2n - 1}.$$
5. On rappelle que la fonction $\Gamma$ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}(z) > 0\}$ par
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$
et que la fonction $\zeta$ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}(z) > 1\}$ par
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{-z} \mathrm{d}t.$$
Montrer que pour $s > 1$, on a
$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$
6. Déduire de 4. et 5. que la fonction $\zeta$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle simple en 1, et que l'on a $\zeta(0) = -1/2$ et $\zeta(-2k) = 0$ si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.