Fonctions doublement périodiques

(presque) S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1. Soient α et β deux complexes non colinéaires, et soit $\Lambda = \alpha\mathbf{Z} \oplus \beta\mathbf{Z}$ le réseau correspondant. Soit f une fonction méromorphe non constante et Λ-périodique, c'est-à-dire à la fois α-périodique et β-périodique.

1. Rappeler pourquoi f ne peut pas être holomorphe.
2. Montrer qu'il existe z_0 tel que f n'a ni zéros ni pôles sur le bord du parallélogramme
$$\{z_0 + x\alpha + y\beta, 0 \leq x, y \leq 1\}$$
et montrer que f a autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités, à l'intérieur de celui-ci.
3. Montrer que si S est réduit à un élément et que $n = 1$, on obtient seulement les fonctions constantes.

Remarque : De telles fonctions sont appelées "fonctions elliptiques" et interviennent dans différents domaines des mathématiques et notamment en arithmétique.

Exercice 2 (Fonction $\wp$ de Weierstrass)**.** Comme dans l'exercice précédent, on se donne α et β deux complexes non colinéaires, et on considère $\Lambda = \alpha\mathbf{Z} \oplus \beta\mathbf{Z}$ le réseau correspondant.

1. Montrer que la série $\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^3}$ est bien définie (on pourra montrer plus généralement que c'est le cas de $\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^r}$ pour n'importe quel réel $r > 2$).
2. Montrer que la série
$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\setminus\Lambda$ et définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.
On note $\wp$ et on appelle fonction $\wp$ de Weierstrass la somme de cette série. Elle dépend bien sûr du réseau Λ.
3. Montrer que $\wp$ est paire et a un pôle double en chaque point du réseau Λ.
4. Montrer que $\wp'$ et $\wp$ sont Λ-périodiques.
5. Montrer qu'il existe deux constantes g_2 et g_3, ne dépendant que de Λ, telles que
$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Exercice 3. Montrer que les zéros de l'équation $z\sin(z) = 1$ sont tous réels.

Exercice 4. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{C}^2$ est holomorphe si elle est holomorphe en chaque variable séparément. On considère les ouverts
$$U = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1|, |z_2| < 1\right\}; U' = U \setminus \left\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1|, |z_2| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Montrer qu'une fonction holomorphe sur U' s'étend toujours en une fonction holomorphe sur U.

On pourra regarder le développement de f en série de Laurent en la variable z_1.