Représentations conformes, théorème de Montel

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1 (Quelques exemples de représentations conformes)**.**

1. Trouver un biholomorphisme entre la bande $\{z,\ \Re\text{é}(z) \in]0,1[\}$ et le disque unité.
2. Trouver un biholomorphisme entre H et $H \setminus \{i\lambda, \lambda \in]0,1]\}$. *On pourra regarder l'application* $z \mapsto z^2$.

Exercice 2.

1. Soient R et S deux rectangles (pleins) du plan. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe f, définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.
   (a) Montrer que f induit une bijection entre les sommets de R et ceux de S.
   (b) Soit C un côté du rectangle S. Montrer qu'il existe un côté c du rectangle R tel que $f(c) \cap C$ soit infini. En se ramenant au cas où c et C sont inclus dans $\mathbf{R}$, montrer que $f(c) = C$ et conclure que f envoie chaque côté de R sur un côté de S.
   (c) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction entière à croissance linéaire et en déduire que f est une transformation affine et que R et S sont semblables.
   (d) Si R et S sont deux rectangles non semblables, montrer qu'il existe une fonction g, holomorphe sur ?, telle que $f(\mathring{R}) = \mathring{S}$, et telle que l'image par f d'un rectangle inclus dans $\mathring{R}$ n'est jamais un rectangle.
2. On suppose à présent que R et S sont deux polygones à n côtés, et f est toujours une application holomorphe définie sur un ouvert contenant R telle que $f(R) = S$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que f réalise une bijection du bord de R sur le bord de S et que les angles intérieurs de R et S sont les mêmes. En déduire que f induit une application conforme de l'intérieur de R sur celui de S.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe de $\Omega \longrightarrow \Omega$. On suppose que f admet un point fixe a. On note f_n la n^e itérée de f.

1. Calculer $f_n'(a)$. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.
2. On suppose $f'(a) = 1$.
   - On suppose que $f \neq Id$. Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geq 2$ tels que pour tout n on ait
   $$f_n(z) = z + nc(z-a)^k + o\left((z-a)^k\right)$$
   au voisinage de a.
   - En déduire que f est l'identité.
3. On suppose que $|f'(a)| = 1$. Montrer qu'il existe une suite croissante (p_n) tels que $f'(a)^{p_n}$ converge vers 1. En déduire que (f_n) admet une sous-suite (g_n) qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact.
4. Montrer que $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω.
5. Montrer que si $|f'(a)| < 1$ alors (f_n) converge vers a uniformément sur tout compact.

Exercice 4. Soit f une représentation conforme du disque unité Δ sur un carré ouvert de centre 0 noté C. On suppose $f(0) = 0$ et on note $f(z) := \sum a_k z^k$ un développement en série entière autour de 0 de f. Soit $g : z \mapsto f^{-1}(if(z))$ du disque dans le disque.

1. Montrer que g est bien défini et qu'il existe α un nombre complexe de module 1 tel que $g(z) = \alpha z$ pour tout z dans le disque.
2. Montrer que $f(iz) = if(z)$ et que $a_k = 0$ pour $k \not\equiv 1[4]$.