ENS Lyon — Algèbre 2

L3 — 2018-2019

DM n°1

À rendre au plus tard le 12 Février

**Exercice 1.** [Un anneau principal non euclidien]

Soit $\alpha := \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. L'objectif de cet exercice est de prouver que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal mais non euclidien.

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
2. On note $N$ l'application envoyant un élément de $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ sur le carré de son module complexe.
   (a) A l'aide de l'application $N$, déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.
   (b) Montrer que si $B$ est un anneau euclidien, il contient un élément $b$ non inversible tel que la restriction à $B^\times \cup \{0\}$ de la projection naturelle $B \to B/(b)$ soit encore surjective. (*Indication : Lorsque $B$ n'est pas un corps, on pourra considérer un élément de stathme minimal.*)
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque $n$ vaut 2 ou 3.
   (d) En conclure que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien.
3. Montrer que pour tous éléments $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $b \neq 0$, il existe alors une paire $(q, r)$ d'éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ telle que :
   — $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$ ;
   — ou bien $a = bq + r$, ou bien $2a = bq + r$.
4. Montrer que l'idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$ engendré par 2 est maximal.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal.
   (*Indication : On pourra s'inspirer de la démonstration donnée pour les anneaux euclidiens.*)