DM n°2 : Nombres constructibles à la règle et au compas

Dans ce DM, on va s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas. On identifie le plan et le corps $\mathbb{C}$, et on définit par récurrence $P_0 = \{0, 1\}$ et, pour $n \geq 1$, P_n est l'union de P_{n-1} et de l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ constructibles à la règle et au compas en un coup à partir de P_{n-1}, c'est-à-dire les points d'intersection de droites et de cercles tracés à partir des points de P_{n-1}. On note $\mathcal{X} = \bigcup_{n\geq 0} P_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des points constructibles à la règle et au compas à partir de $\{0, 1\}$.

Exercice 1. [Caractérisation des nombres constructibles]

1. Déterminer P_1 et P_2 (faire une figure).
2. Montrer que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont dans $\mathcal{X}$, alors $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, z_1z_2 et z_1/z_2 sont aussi dans $\mathcal{X}$.
3. Montrer que $\mathcal{X}$ est un corps dans lequel tout élément admet une racine carrée.
4. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un corps dont tous les éléments sont constructibles à la règle et au compas. On note E_K les points constructibles en un coup à partir de K. Montrer que tout point de E_K appartient à une extension quadratique de K.
5. En déduire qu'un point $x \in \mathbb{C}$ est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, il existe une suite finie de corps $\mathbb{Q} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, L_{i+1} est une extension quadratique de L_i et telle que $x \in L_n$.

Exercice 2. [Nombres non constructibles]

1. On appelle trisection d'un angle le fait de partager un angle en trois parties égales. Montrer qu'il n'est pas possible de trisecter $\pi/3$.
2. On va maintenant exhiber un nombre algébrique de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas constructible à la règle et au compas.
   (a) Montrer que le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et possède quatre racines distinctes, qu'on notera z_1, z_2, z_3 et z_4 dans $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que $u = z_1z_2 + z_3z_4$ est racine du polynôme $X^3 + 4X - 1$ (on pourra remarquer que $u = t - 1/t$, avec $t = z_1z_2$, et calculer $u^4 + 4u^2 - u$).
   (c) En déduire qu'aucun des z_i n'est dans $\mathcal{X}$.