PARTIEL

ALGÈBRE L3

Les notes de cours sont autorisées. La bonne présentation de la copie compte dans la note. Tous les anneaux sont commutatifs.

1. Corps des fractions

1.1. Soit B un anneau intègre et A un sous-anneau de B. On suppose qu'il existe un idéal non nul I de B qui est contenu dans A. Construire un morphisme d'anneaux injectif $B \to \mathrm{Frac}(A)$.

1.2. Trouver un idéal non nul I de $B = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ qui est contenu dans un sous-anneau strict A de B.

2. Le lemme de Capelli

Soit K un corps et L une extension algébriquement close de K.

2.1. Soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme non constant et $y \in L$ tel que $P(y) = 0$. Montrer que $[K(y) : K] \leq \deg(P)$, avec égalité si et seulement si $P(X)$ est irréductible.

2.2. Soient $F(X), G(X) \in K[X]$ deux polynômes non constants et α une racine de $F(X)$. Montrer que $F(G(X))$ est irréductible si et seulement si $F(X)$ est irréductible et $G(X)-\alpha$ est irréductible dans $K(\alpha)[X]$.

Indication: soit β une racine de $G(X) - \alpha$. Que peut-on dire de $[K(\beta) : K]$?

3. Anneaux factoriels

Soit m un entier qui n'est pas un carré et soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{m}] \subset \mathbf{C}$. Le but de cet exercice est de montrer que si A est factoriel, alors il est principal. On suppose donc dans tout l'exercice que A est factoriel.

3.1. Soit I un idéal non nul de A. Montrer que A/I est un groupe abélien fini.

3.2. Montrer que A est un anneau noethérien.

3.3. Montrer que tout anneau intègre fini R est un corps puis que si l'idéal I de la question 3.1 est premier, alors I est maximal.

Date: 1er mars.

3.4. On suppose que I est un idéal premier non nul de A et que $x \in I \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un facteur premier π de x tel que $(\pi) \subset I$, puis que $I = (\pi)$.

3.5. On suppose maintenant que J est un idéal quelconque de A. Montrer que si $J \neq A$, alors il existe π premier de A tel que $J \subset (\pi)$.

3.6. Soient $x, y \in A$ dont le pgcd est une unité. Montrer que $(x, y) = A$.

3.7. Montrer que A est un anneau principal.