ENS Lyon | Algèbre 2
L3 | 2018-2019

TD n°10 : Théorie de Galois

Exercice 1. Soient $x = \sqrt[3]{2}, j = e^{2i\pi/3}$ et $K = \mathbf{Q}[x, j]$.

1. Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne, de dimension 6, et que $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Expliciter la correspondance de Galois pour l'extension $K/\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G. Si $x \in L$, on note $\mathrm{Stab}(x)$ le stabilisateur de x pour l'action de G sur L. Montrer que $L^{\mathrm{Stab}(x)} = K[x]$.

Exercice 3. Soit L un corps de décomposition sur $\mathbf{Q}$ de $X^4 - 6 \in \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$.

1. Montrer que $L = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{6}, i)$ et que $[L : \mathbf{Q}] = \mathbf{8}$.
2. Montrer que $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ contient des éléments r et s tels que
$$r(\sqrt[4]{6}) = i\sqrt[4]{6}, r(i) = i, s(\sqrt[4]{6}) = \sqrt[4]{6}, s(i) = -i.$$
3. Montrer que G est isomorphe à D_8.
4. Expliciter les sous-groupes de G.
5. Faire la liste des sous-corps de L et donner un élément primitif pour chacun d'entre eux.
6. Parmi ces sous-corps, lesquels sont des extensions galoisiennes de $\mathbf{Q}$?

Exercice 4. Soit $P(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Montrer que P possède trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées.
3. On fixe désormais L un corps de décomposition de P, et on note $G = Gal(L/\mathbf{Q})$. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. En déduire la forme des sous-extensions galoisiennes de $L/\mathbf{Q}$.

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout groupe fini G, il existe une extension finie galoisienne de groupe de Galois G.
   Soit p un nombre premier impair, soit m un entier naturel non nul et soit $(n_1, \cdots, n_{p-2})$ un $(p-2)$-uplet d'entiers relatifs distincts. On pose $f = (X^2 + m)\prod_{i=1}^{p-2}(X - n_i)$.
2. Montrer que pour tout réel ϵ de valeur absolue suffisamment petite, le polynôme $f+\epsilon \in \mathbf{R}[\mathbf{X}]$ admet $p-2$ racines réelles simples et 2 racines complexes conjuguées.
3. Pour ℓ un nombre premier, on pose $P_\ell = \ell^p f(X/\ell) + \ell$. Montrer que pour ℓ assez grand, le polynôme $P_\ell \in \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$ est un polynôme unitaire irréductible, ayant $p-2$ racines réelles simples et 2 racines complexes conjuguées. Quel est le groupe de Galois de P_ℓ ?
4. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe une extension finie galoisienne L/K de groupe de Galois G telle que K est une extension finie de $\mathbf{Q}$.

Exercice 6. Soient $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts, et $K = \mathbf{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}]$.

1. Montrer que l'extension $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne. On note $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$.
2. Montrer que tout élément de G est d'ordre 2, et en déduire que G est un groupe abélien, isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$ pour un certain entier r.

3. Exprimer en fonction de r le nombre de sous-extensions de $K/\mathbf{Q}$ de degré 2.
4. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.
5. Le réel $\sqrt{15}$ est-il dans $\mathbf{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{42})$?

Exercice 7. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, et soient $f = X^3 - (1+\sqrt{2})$ et $g = X^3 - (1-\sqrt{2})$. On désigne par α (resp. β) la racine réelle de f (resp. g) dans $\mathbb{C}$. On pose $L = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \alpha, j)$.

1. (a) Trouver un polynôme P de degré 6 à coefficients rationnels dont α soit racine.
   (b) Montrer que $k \subset \mathbf{Q}(\alpha)$ et que $\mathbf{Q}(\alpha) = k(\alpha)$.
   (c) Exprimer β en fonction de α.
   (d) Soit $\omega = \alpha - \frac{1}{\alpha}$. Trouver un polynôme Q de degré 3 dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $Q(\omega) = 0$ et montrer que Q est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Exprimer les autres racines de Q en fonction de j et ω.
   (e) Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. (a) Montrer que $[L : \mathbf{Q}] = 12$.
   (b) Déterminer les douze $\mathbf{Q}$-automorphismes de L sur un sous-corps de $\mathbb{C}$.
   (c) Montrer que $L/\mathbf{Q}$ est galoisienne.