TD n°2 : Anneaux euclidiens, anneaux intègres, racines de polynômes

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés commutatifs.

Exercice 1. Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors A est un corps.
2. Montrer que si k est un corps tel que A est muni d'une structure de k-espace vectoriel de dimension finie, compatible avec la multiplication dans A, alors A est un corps.

Exercice 2. [Exemples d'anneaux euclidiens] Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont euclidiens.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et soit $P \in A[X]$. Montrer que le nombre de racines de P, comptées avec multiplicités, est inférieur ou égal au degré de P.

Exercice 4. [Multiplicité et dérivées] Soient K un corps, P un polynôme en une variable à coefficients dans K, α un élément de K et m un entier supérieur ou égal à 1.

1. On suppose que α est racine de P de multiplicité supérieure ou égale à m. Montrer que α annule les dérivées de P jusqu'à l'ordre $m-1$.
2. Montrer que la réciproque n'est pas forcément vraie, et trouver une condition nécessaire et suffisante sur K pour que la réciproque soit toujours vraie.

Exercice 5. Soit k un corps. Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^m - 1$ dans $k[X]$.

Exercice 6. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD des polynômes $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $Q(X) = X^5 - 5X^3 - 9X^2 - 8X - 3$ dans $\mathbb{R}[X]$, et en déduire des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.