TD n°3 : Anneaux euclidiens, anneaux intègres, racines de polynômes

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés commutatifs.

Exercice 1. Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors A est un corps.
2. Montrer que si k est un corps tel que A est muni d'une structure de k-espace vectoriel de dimension finie, compatible avec la multiplication dans A, alors A est un corps.
3. Montrer que si $A[X]$ est principal, alors A est un corps.

Exercice 2. [Exemples d'anneaux euclidiens] Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont euclidiens.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et soit $P \in A[X]$. Montrer que le nombre de racines de P, comptées avec multiplicités, est inférieur ou égal au degré de P.

Exercice 4. [Multiplicité et dérivées] Soient K un corps, P un polynôme en une variable à coefficients dans K, α un élément de K et m un entier supérieur ou égal à 1.

1. On suppose que α est racine de P de multiplicité supérieure ou égale à m. Montrer que α annule les dérivées de P jusqu'à l'ordre $m-1$.
2. Montrer que la réciproque n'est pas forcément vraie, et trouver une condition nécessaire et suffisante sur K pour que la réciproque soit toujours vraie.

Exercice 5. Soit k un corps. Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^m - 1$ dans $k[X]$.

Exercice 6. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD des polynômes $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $Q(X) = X^5 - 5X^3 - 9X^2 - 8X - 3$ dans $\mathbb{R}[X]$, et en déduire des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 7. [Unicité dans la division euclidienne] Le but de cet exercice est de montrer que, si A est un anneau euclidien dans lequel la division euclidienne est unique, alors A est un corps ou A est de la forme $k[X]$ avec k un corps. Soit donc A un anneau euclidien, de stathme N'.

1. On définit $N : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ en posant $N(x)$ la plus petite valeur des $N'(y)$, pour y parcourant les multiples non nuls de x.
   (a) Montrer que N est un stathme euclidien sur A.
   (b) Montrer qu'on a $N(ab) \geq N(a)$ pour tous $a, b \in A \setminus \{0\}$.
2. Montrer qu'on a unicité de la division euclidienne si et seulement si $N(a+b) \leq \max(N(a), N(b))$ pour tous $a, b \in A$.
3. Montrer qu'on ne perd pas de généralité à supposer que $N(1) = 0$.
   On suppose à présent qu'on a unicité de la division euclidienne.
4. Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un corps (on pourra commencer par montrer que x est inversible dans A si et seulement si $N(x) = 0$).
5. On suppose que $F := A^\times \cup \{0\}$ est différent de A, et on prend $a \in A$ tel que $N(a)$ est minimal pour les éléments x de A tels que $N(x) \neq 0$. Montrer que tout élément b non nul de A s'écrit de façon unique sous la forme
   $$b = q_k a^k + \cdots + q_0,$$
   avec $q_k \neq 0$ et avec pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, $q_i \in F$.
6. Conclure.