TD n°5 : Anneaux noethériens

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Le sous anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôles sur le cercle $|z| = 1$.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
5. L'anneau des suites à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Généralités sur les anneaux noethériens]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau noethérien vérifie-t-il la même propriété ?
2. Supposons $A[X]$ noethérien. A est-il noethérien ?
3. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout élément s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 3. Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux pour l'inclusion.
3. *Bonus : en utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal.*

Exercice 4.

1. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout idéal s'écrit comme intersection finie d'idéaux irréductibles, où un idéal I est dit irréductible si $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$ ou $I = I_2$.
2. Soient A un anneau noethérien et I un idéal. On rappelle que $\sqrt{I}$ est l'idéal défini par $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n > 0, x^n \in I\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Exercice 5.

1. Soient A un anneau et $S \subset A$ est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0. Notons E_S l'ensemble des idéaux disjoints avec S. Montrer que E_S est non-vide, et que tout élément maximal de E_S est un idéal premier.
2. Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier non-nul contient un élément premier.
3. Soit A un anneau factoriel. Montrer que A est principal si et seulement si tout idéal premier non-nul est maximal.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\tilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.

3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. On note $\phi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ l'application de réduction modulo p. Montrer que $\phi(I)$ est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?