TD n°6 : Extensions de corps

Exercice 1. Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 2.

1. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élément $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
2. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.

Exercice 3. Soit K un corps et $L = K(X)$.

1. L'élément $X \in L$ est-il algébrique sur K ?
2. Déterminer les éléments de L algébriques sur K.
3. Montrer que si $\beta \in L \setminus K$, L est algébrique sur $K(\beta)$.

Exercice 4. [Extensions biquadratiques]

1. Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit L/K une extension de degré 2 (*extension quadratique*).
   (a) Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Démontrer qu'il existe $a, b \in K$ tels que $P = (X-a)^2 - b$.
   (b) Démontrer qu'il existe un élément non nul α de L tel que $\alpha^2 \in K$ et $L = K(\alpha)$.
   (c) On conserve les notations de la question (b). Soit $\beta \in L$ tel que $L = K(\beta)$ et $\beta^2 \in K$. Démontrer que $\beta/\alpha \in K$.
2. Soient p et q deux nombres premiers distincts.
   (a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
   (b) Soit $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ tel que $\beta^2 \in \mathbb{Q}$. Démontrer qu'un des éléments β, $\beta/\sqrt{p}$, $\beta/\sqrt{q}$, $\beta/\sqrt{pq}$ appartient à $\mathbb{Q}$. (On pourra discuter suivant que β appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ou pas).
   (c) Donner la liste des sous-extensions de $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
   (d) Calculer $(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2$. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5. Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré 4. Montrer que P est irréductible si et seulement si pour toute extension L/K de degré ≤ 2, P n'a pas de racine dans L. Généraliser ce critère à un polynôme de degré n.