TD n°9 : Extensions séparables

Exercice 1. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer que $K^p = \{x^p : x \in K\}$ est un sous-corps de K tel que K/K^p est normale.

Exercice 2. Soit L/K une extension finie de corps et soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note $[L : K]_s$ le nombre de K-plongements $L \to \overline{K}$.

1. Montrer que si tout élément de $L \setminus K$ est inséparable sur K (on dit que l'extension est *purement inséparable* ou *radicielle*), alors la caractéristique de K est un nombre premier p, que $[L : K]_s = 1$ et que $[L : K]$ est une puissance de p.
2. Montrer que dans le cas général, $[L : K]_s$ divise $[L : K]$ et que soit le quotient est 1, soit K est de caractéristique p et le quotient est une puissance de p.
3. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(L/K)$ est fini et que son cardinal divise $[L : K]_s$, et les deux coïncident si et seulement si l'extension est normale.
4. Si $M/L/K$ sont des extensions successives, montrer que $[M : K]_s = [M : L]_s \cdot [L : K]_s$.

Exercice 3. Soit q une puissance d'un nombre premier p, soit n un entier ≥ 1 et soient $L = \mathbb{F}_q(Y)$ et $K = \mathbb{F}_q(Y^n)$.

1. Montrer que si $p|n$, alors L/K n'est pas séparable.
2. Montrer que si p est premier à n, alors L/K est séparable.
3. Montrer que L/K est normale si et seulement si $q \equiv 1 \mod n$.

Exercice 4. [Extensions monogènes] Dans un premier temps, on va montrer qu'une extension finie L/K de corps infinis est monogène (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K[\alpha]$) si et seulement si elle ne possède qu'un nombre fini d'extensions intermédiaires.

1. On suppose que L/K est monogène, $L = K[\alpha]$. Si P est le polynôme minimal de α sur K, montrer qu'on a une application injective de l'ensemble des extensions intermédiaires de L/K dans l'ensemble des diviseurs unitaires de P dans $L[X]$.
2. Réciproquement, si L/K ne possède qu'un nombre fini d'extensions intermédiaires, en considérant $\alpha, \beta \in L$, montrer que $K(\alpha, \beta)$ est monogène (on pourra considérer les extensions de la forme $K(\alpha + t\beta)$ pour $t \in K$). En déduire que L est monogène.
   On va maintenant exhiber une extension finie L/K de corps infinis non monogène.
3. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Expliquer pourquoi $P(X) = X^p + T$ est irréductible sur $K(T)$. Montrer qu'un corps de rupture de P en est aussi un corps de décomposition.
4. Soit $K = \mathrm{Frac}(\mathbb{F}_p[T, U])$ et L un corps de décomposition de $P(X) = (X^p - T)(X^p - U)$.
   (a) Montrer que $[L : K] = p^2$.
   (b) Montrer que si $x \in L$, alors $x^p \in K$.
   (c) En déduire que L/K n'est pas monogène.

Exercice 5. [Sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_n$] Un sous-groupe $G \subset \mathfrak{S}_n$ est dit transitif si, pour tout i, j dans $\{1, \cdots, n\}$, il existe $g \in G$ tel que $g(i) = j$.

1. Lister les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 3$ et ceux non-transitifs de $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que si $G \subset \mathfrak{S}_n$ est transitif, alors $n||G|$.
3. On va montrer qu'un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_4$ est conjugué à un des cinq sous-groupes suivants : $C = \langle(1, 2, 3, 4)\rangle$, le groupe de Klein K, $D = \langle C, (1, 3)\rangle$, $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$.
   (a) Montrer que ces sous-groupes sont bien transitifs.
   (b) Montrer que $|D| = 8$, et que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre 8 est conjugué à D.
   (c) Conclure.