DM N°1

À RENDRE AU PLUS TARD LE 20 OCTOBRE

Exercice 1. On considère l'application $q : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $q(A) = \det(A)$.

1. Montrer que l'application q est une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Dire si q est positive. Si elle l'est, expliquer pourquoi. Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp = \{x \in E : \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$.
3. Pour $x \in E$, on définit l'application $\varphi_x : y \in E \mapsto (x|y)$. On admettra sans avoir besoin de le démontrer que pour tout x dans E, l'application φ_x est une forme linéaire sur E.
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto \varphi_x$ est injective.
   (b) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un élément $x \in E$ tel que $\varphi = \varphi_x$.
   (c) Expliquer comment, à partir de φ, trouver $x \in E$ tel que $\varphi = \varphi_x$ (Indication : on pourra chercher à déterminer le noyau de φ_x).

   On considère à présent le cas où $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le résultat suivant sans avoir besoin de le démontrer : pour toutes matrices A, B dans E, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
4. Montrer que l'application $q : A \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAA)$ définit une forme quadratique sur E.
5. L'application q est-elle positive ? Définie positive ?
6. En déduire que pour tout hyperplan H de E, il existe une matrice $A \neq 0$ telle que $H = \{M \in E : \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$.
7. Montrer que tout hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible (Indication : on pourra utiliser sans le démontrer le fait qu'une matrice A de rang r de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme PJ_rQ, où $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et J_r est la matrice diagonale dont les r premiers coefficients sur la diagonale sont des 1 et les autres coefficients diagonaux sont nuls, et on pourra ensuite penser aux matrices de permutation vues en cours).