DM n°1
À rendre au plus tard le 20 octobre

Exercice 1. On considère l'application $q : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $q(A) = \det(A)$.

1. Montrer que l'application q est une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

   Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a $q(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. On commence par vérifier que si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $q(\lambda A) = \lambda^2 A$, ce qui est direct. Ensuite, on calcule

   $$b(A, B) = \frac{1}{2}(q(A + B) - q(A) - q(B)) = \frac{1}{2}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - b_{12}a_{21} - a_{12}b_{21}),$$

   et on vérifie la bilinéarité. Comme la formule donnant $b(A, B)$ est symétrique en A et B, il suffit de montrer que b est linéaire à droite, ce qu'on montre directement par un calcul.

2. Dire si q est positive. Si elle l'est, expliquer pourquoi. Sinon, donner un contre-exemple.

   La forme quadratique q n'est pas positive : on peut par exemple prendre pour A la matrice dont les coefficients sont $a_{11} = a_{22} = 0$ et $a_{12} = a_{21} = 1$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp = \{x \in E : \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

   Il suffit de montrer que $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soient $x, y \in F^\perp$. Comme x et y sont dans $F^\perp$, pour tout $z \in F$, on a $(x|z) = (y|z) = 0$. Soit $z \in F$, alors

   $$(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z)$$

   par bilinéarité, et donc $(\lambda x + \mu y|z) = 0$. On en déduit que pour tout $z \in F$, $(\lambda x + \mu y|z) = 0$ et donc $\lambda x + \mu y|z$ appartient à $F^\perp$.

2. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$.

   Par définition de $F^\perp$, pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in F^\perp$, on a $(x|y) = 0$, de sorte que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

   On sait d'après le cours que pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a $G \oplus G^\perp = E$. En appliquant le résultat à F, on obtient $\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$, et en appliquant le résultat à $F^\perp$, on obtient $\dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E)$.

   On en déduit donc que $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$, et donc l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$ puisque $F \subset (F^\perp)^\perp$.

3. Pour $x \in E$, on définit l'application $\varphi_x : y \in E \mapsto (x|y)$. On admettra sans avoir besoin de le démontrer que pour tout x dans E, l'application φ_x est une forme linéaire sur E.

   (a) Montrer que l'application $x \mapsto \varphi_x$ est injective.

   On doit montrer que $\varphi_x = 0$ si et seulement si $x = 0$. Si $\varphi_x = 0$, alors en particulier $\varphi_x(x) = 0$ et donc $(x|x) = 0$, ce qui implique bien que $x = 0$ puisque le produit scalaire est par définition une forme bilinéaire symétrique qui est définie positive.

   (b) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un élément $x \in E$ tel que $\varphi = \varphi_x$.

   On a montré à la question précédente que l'application $x \mapsto \varphi_x$ était injective. Cette application est clairement linéaire (on vérifie directement que $\varphi_{\lambda x+\mu y} = \lambda\varphi_x + \mu\varphi_y$ pour $x, y \in E$ par bilinéarité du produit scalaire), et est à valeurs dans $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Cet espace est de dimension égale à la dimension de E, et donc l'application $x \mapsto \varphi_x$ est également surjective (c'est une conséquence directe du théorème du rang : si on note h l'application $x \mapsto \varphi_x$, on a $\dim(\ker h) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(E)$). Comme elle est surjective, toute forme linéaire φ sur E peut s'écrire sous la forme φ_x pour un certain $x \in E$.

(c) Expliquer comment, à partir de φ, trouver $x \in E$ tel que $\varphi = \varphi_x$ (Indication : on pourra chercher à déterminer le noyau de φ_x).

Si $\varphi = 0$, on prend $x = 0$.

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. On va déterminer le noyau de φ_x. Soit $y \in E$. On a $\varphi_x(y) = 0$ si et seulement si $(x|y) = 0$. Autrement dit, le noyau de φ_x est l'ensemble des éléments orthogonaux à x, de sorte que $\ker(\varphi_x) = (\mathrm{Vect}(x))^\perp$. Par la question 2, on en déduit que $(\ker(\varphi_x))^\perp = \mathrm{Vect}(x)$.

Si x est tel que $\varphi_x = \varphi$, on en déduit que $x \in (\ker(\varphi))^\perp$, qui est une droite de E (c'est encore une fois une conséquence directe du théorème du rang). On choisit z un vecteur directeur de cette droite et on sait que le x qu'on cherche est de la forme $\mu \cdot z$. On va donc chercher à déterminer μ.

On veut $\varphi_{\mu\cdot z}(z) = \varphi(z)$, et on sait que $\varphi_{\mu\cdot z}(z) = \mu(z|z)$. Autrement dit, si on pose $\mu = \frac{\varphi(z)}{(z|z)}$, on a alors que $\varphi_{\mu\cdot z}(z) = \varphi(z)$.

On pose maintenant $x = \frac{\varphi(z)}{(z|z)} \cdot z$ (remarque : si on choisit z comme étant un vecteur directeur de $(\ker(\varphi))^\perp$ de norme 1, on a juste à poser $x = \varphi(z) \cdot z$). On va vérifier que $\varphi = \varphi_x$.

Comme on a $\ker(\varphi) \oplus (\ker(\varphi))^\perp = E$, tout élément y de E peut s'écrire de façon unique sous la forme $y_0 + y_1$, avec $y_0 \in \ker(\varphi)$ et $y_1 \in (\ker(\varphi))^\perp = \mathrm{Vect}(z) = \mathrm{Vect}(x)$. En particulier, $y_1 = \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \lambda\varphi(z) = \lambda\varphi(z)$$

car $y_0 \in \ker(\varphi)$. De plus,

$$\varphi_x(y) = (x|y) = (x|y_0) + \lambda\varphi_x(z) = \lambda\varphi_x(z) = \lambda\varphi(z),$$

puisque $(x|y_0) = 0$ (car $y_0 \in \ker(\varphi)$ et $x \in (\ker(\varphi))^\perp$) et $\varphi_x(z) = \varphi(z)$ (par construction du x ci-dessus).

On a donc $\varphi(y) = \varphi_x(y)$ pour tout y dans E, ce qu'on souhaitait.

On considère à présent le cas où $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le résultat suivant sans avoir besoin de le démontrer : pour toutes matrices A, B dans E, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

4. Montrer que l'application $q : A \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAA)$ définit une forme quadratique sur E.

   On commence par remarquer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $q(\lambda A) = \lambda^2 A$, ce qui est direct. Ensuite, on pose $b(A, B) = q(A + B) - q(A) - q(B)$.

   On a

$$q(A + B) - q(A) - q(B) = \mathrm{Tr}({}^t(A + B)(A + B)) - \mathrm{Tr}({}^tAA) - \mathrm{Tr}({}^tBB)$$

   ce qui donne en développant $\mathrm{Tr}({}^t(A + B)(A + B))$:

$$q(A + B) - q(A) - q(B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) + \mathrm{Tr}({}^tBA)$$

   qui est bien bilinéaire symétrique, de sorte que q est bien une forme quadratique. En utilisant le fait admis dans l'énoncé et le fait que la trace de la transposée d'une matrice est égale à la trace de cette matrice, on trouve que la forme bilinéaire symétrique associée à q est $h(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

5. L'application q est-elle positive ? Définie positive ?

   Un calcul direct sur les coefficients de $A = (a_{ij})$ donne $q(A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^2|$, de sorte que $q(A) > 0$ sauf si $A = 0$. On trouve donc que q est définie positive.

6. En déduire que pour tout hyperplan H de E, il existe une matrice $A \neq 0$ telle que $H = \{M \in E : \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$.

   Soit H un hyperplan de E. On sait que les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles, de sorte qu'il existe φ forme linéaire sur E telle que $H = \ker(\varphi)$. Par la question 3 de l'exercice, appliquée à l'espace euclidien $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire correspondant à la forme quadratique qu'on a définie ci-dessus, il existe une matrice $A \in E$ telle que $\varphi = \varphi_{{}^tA}$, en reprenant les notations de la question 3. Si on réécrit exactement ce que ça signifie, on trouve que $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des éléments orthogonaux à ${}^tA$ pour ce produit scalaire, c'est-à-dire que

$$\ker(\varphi) = \{M \in E : \mathrm{Tr}(AM) = 0\}.$$

7. Montrer que tout hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible (Indication : on pourra utiliser sans le démontrer le fait qu'une matrice A de rang r de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme PJ_rQ, où $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et J_r est la matrice diagonale dont les r premiers coefficients sur la diagonale sont des 1 et les autres coefficients diagonaux sont nuls, et on pourra ensuite penser aux matrices de permutation vues en cours).

On va suivre les indications au fur et à mesure. Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe une matrice A (forcément non nulle) telle que $H = \{M \in E : \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$.

On veut montrer qu'il existe M inversible telle que $\mathrm{Tr}(AM) = 0$. Notons r le rang de A, de sorte qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = PJ_rQ$. On doit donc montrer qu'on peut trouver M inversible telle que $\mathrm{Tr}(PJ_rQM) = 0$ et donc que $\mathrm{Tr}(J_r(QMP)) = 0$, en utilisant le fait admis sur la trace d'un produit. Comme Q et P sont inversibles, montrer qu'on peut trouver M inversible telle que $\mathrm{Tr}(J_r(QMP)) = 0$ est équivalent à montrer qu'on peut trouver M' inversible telle que $\mathrm{Tr}(J_rM') = 0$ (il suffit alors de prendre $M = Q^{-1}M'P^{-1}$).

Soit maintenant M' la matrice de permutation associée au cycle $(12\cdots n)$. C'est une matrice de permutation donc elle est inversible, et la matrice J_rM' n'a que des coefficients nuls sur la diagonale (la matrice J_rM' est égale à la matrice dont les r premières lignes sont égales à celles de M', et les $n-r$ suivantes sont nulles, et M' n'a que des zéros sur sa diagonale puisqu'un cycle de S_n de longueur n n'a aucun point fixe), donc sa trace est nulle.

Finalement, on a trouvé une matrice inversible dans H.