DSI
Le 14 novembre 2023

Les notes de cours ne sont pas autorisées
Durée : 1h30

Le barème est indicatif

Exercice 1. [5 points] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$. Décomposer A sous la forme LU et en déduire le déterminant de A.

Exercice 2. [7 points] Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer, sans les calculer, que les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives (penser à Gershgorin-Hadamard).

(2) Montrer que A est définie positive.
On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par $(X|Y) =^t XAY$.

(3) Dire quelle est la matrice de Gram associée à ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(4) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, trouver une matrice R telle que ${}^tRR = A$.

Exercice 3. [9 points] Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels de dont le degré est inférieur ou égal à n. On définit deux applications q, $q' : E \to \mathbb{R}$ par les formules

$$q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)dt$$

et

$$q'(P) = \int_0^1 P^2(t)dt.$$

(1) Montrer que q et q' sont des formes quadratiques sur E. Préciser si q' est définie positive.

(2) Calculer les matrices de Gram associées aux formes bilinéaires symétriques correspondant à q et q' dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ de E (on rappelle que la matrice de Gram M associée à une forme bilinéaire b et une famille de vecteurs $(f_1, \cdots, f_r)$ est donnée par la formule $M_{ij} = b(f_i, f_j)$). On notera respectivement A et B les matrices de Gram obtenues.

(3) Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQBQ = I_n$.

(4) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que ${}^tPBP = I_n$ et telle que ${}^tPAP$ est diagonale (on pourra appliquer le théorème spectral à la matrice ${}^tQAQ$).