Université de Bordeaux
L3

Algorithmique Mathématique 2
2023-2024

DSI
Le 14 novembre 2023

Les notes de cours ne sont pas autorisées
Durée : 1h30

Le barème est indicatif

Exercice 1. [5 points] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$. Décomposer A sous la forme LU et en déduire le déterminant de A.

On dispose les calculs comme dans le cours

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (\mathbf{2}) & 3 & 12 \\ (\mathbf{4}) & 5 & 26 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_1 \end{array}$$

Les coefficients entre parenthèses et en rouge remplacent des 0 dans la nouvelle matrice. Ce sont les opposés des multiplicateurs. Puis on continue

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (\mathbf{2}) & 3 & 12 \\ (\mathbf{4}) & (\mathbf{\frac{5}{3}}) & 6 \end{pmatrix} \qquad l_3 \longleftarrow l_3 - \frac{5}{3}l_2$$

On retrouve la matrice U en haut à droite et la matrice L formée d'une diagonale de 1 et de la partie inférieure gauche (en rouge et entre parenthèses).

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve $\det(A) = \det(U) = 1 \times 3 \times 6 = 18$.

Exercice 2. [7 points] Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer, sans les calculer, que les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives (penser à Gershgorin-Hadamard).

Solution : la matrice A est symétrique à coefficients réels, donc ses valeurs propres sont réelles. Par Gershgorin-Hadamard, elles sont contenues dans la réunion des disques fermés de centre 3 et de rayon 2, donc dans le disque fermé de centre 3 et de rayon 2. Comme elles sont de plus réelles, on en déduit qu'elles appartiennent à l'intervalle $[1, 5]$ et sont donc strictement positives.

(2) Montrer que A est définie positive.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée, de sorte qu'il existe une base orthonormée (u, v) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$, avec λ et μ des réels strictement positifs par la question précédente. Soit $X \in \mathbb{R}^2$. On peut écrire $X = x_1 u + x_2 v$, avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Calculons ${}^tXAX$: ${}^tXAX = {}^t(x_1 u + x_2 v)A(x_1 u + x_2 v) = {}^t(x_1 u + x_2 v)(x_1 \lambda u + x_2 \mu v) = \lambda x_1^2 + \mu x_2^2$ puisque la base (u, v) est orthonormée. Comme λ et μ sont strictement positifs, on en déduit que ${}^tXAX \geqslant 0$, et que ${}^tXAX = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$, donc si et seulement si $X = 0$. Cela permet de conclure que A est définie positive.

On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par $(X|Y) =^t XAY$.

(3) Dire quelle est la matrice de Gram associée à ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de Gram associée à ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est A : c'est la matrice dont le terme général est donné par ${}^te_iAe_j$, or ${}^te_iAe_j = a_{ij}$.

(4) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, trouver une matrice R telle que ${}^tRR = A$.

Il faut orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2) pour le produit scalaire donné par A. On effectue donc les calculs :

On pose $e_1^* = e_1$,

$$e_2^* = e_2 - \frac{(e_2 \mid e_1^*)}{(e_1^* \mid e_1^*)} e_1^* ,$$

avec $(e_2 \mid e_1^*) = -2$ et $(e_1^* \mid e_1^*) = 3$. Soit $e_2^* = e_2 + (2/3)e_1^* = (2/3, 1)$ et

$$(e_2^* \mid e_2^*) = 3(2/3)^2 - 2(4/3) + 3 = 5/3 .$$

Déterminons la matrice de passage de $e' = (e_i')$ à $e = (e_i)$:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1'||e_1^*|| = \sqrt{3}e_1' , \\ e_2 &= e_2^* - \frac{2}{3}e_1^* = ||e_2^*||e_2' - \frac{2||e_1^*||}{3}e_1' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}e_2' - \frac{2}{\sqrt{3}}e_1' , \end{aligned}$$

soit

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. [9 points] Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels de dont le degré est inférieur ou égal à n. On définit deux applications q, $q' : E \to \mathbb{R}$ par les formules

$$q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)dt$$

et

$$q'(P) = \int_0^1 P^2(t)dt.$$

(1) Montrer que q et q' sont des formes quadratiques sur E. Préciser si q' est définie positive.

Commençons par q : on écrit $b(P, Q) = \frac{1}{2}(q(P + Q) - q(P) - q(Q))$, et le calcul donne $b(P, Q) = \frac{1}{2}\int_0^1 P(t)Q'(t) + P'(t)Q(t)dt$. On vérifie que $b(P, P) = q(P)$ (ou si on préfère, que $q(\lambda P) = \lambda^2 q(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$). L'écriture $b(P, Q) = \frac{1}{2}(q(P+Q)-q(P)-q(Q))$ montre que cette application est symétrique en (P, Q). Il reste donc à montrer que l'application $(P, Q) \mapsto b(P, Q)$ est linéaire à droite, puisque par symétrie elle sera alors bilinéaire.

On calcule $b(P, \lambda Q + \mu R) = \frac{1}{2}\int_0^1 P(t)(\lambda Q + \mu R)'(t) + P'(t)(\lambda Q + \mu R)(t)dt$ et on obtient en développant $b(P, \lambda Q + \mu R) = \lambda b(P, Q) + \mu b(P, R)$, qui est bien ce qu'on voulait.

De la même façon, pour q', on écrit $b'(P,Q) = \frac{1}{2}(q'(P+Q) - q'(P) - q'(Q))$ et le calcul donne $b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Là encore, On vérifie que $b'(P,P) = q'(P)$ (ou si on préfère, que $q'(\lambda P) = \lambda^2 q'(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$). On montre comme précédemment que l'application $(P,Q) \mapsto b'(P,Q)$ est bilinéaire (elle est là encore symétrique via l'écriture $b'(P,Q) = \frac{1}{2}(q'(P+Q) - q'(P) - q'(Q)))$.

Il reste à voir que q' est définie positive : $q'(P)$ est l'intégrale entre 0 et 1 d'une fonction positive, donc $q'(P) \geqslant 0$. Si $q'(P) = 0$, c'est que $P^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc que P est le polynôme nul car il a alors une infinité de racines.

(2) Calculer les matrices de Gram associées aux formes bilinéaires symétriques correspondant à q et q' dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ de E (on rappelle que la matrice de Gram M associée à une forme bilinéaire b et une famille de vecteurs $(f_1, \cdots, f_r)$ est donnée par la formule $M_{ij} = b(f_i, f_j)$). On notera respectivement A et B les matrices de Gram obtenues.

Notons b la forme bilinéaire symétrique associée à q, et b' la forme bilinéaire symétrique associée à q'. On a pour $(i,j) \neq (0,0)$:

$$b(X^i, X^j) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^i j t^{j-1} + i t^{i-1} t^j dt$$

soit

$$b(X^i, X^j) = \frac{1}{2}\int_0^1 (i+j) t^{i+j-1} dt$$

et donc $b(X^i, X^j) = \frac{1}{2}$. Si $i = j = 0$, on trouve $b(1,1) = 0$. La matrice de Gram correspondante est donc la matrice A dont le terme général égal à $\frac{1}{2}$, sauf le tout premier coefficient a_{11} qui est nul.

Pour q', on fait le même genre de calculs :

$$b'(X^i, X^j) = \int_0^1 t^i t^j dt = \frac{1}{i+j+1}$$

et donc la matrice de Gram B correspondante est la matrice de terme général $(\frac{1}{i+j+1})$.

(3) Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQBQ = I_n$.

Comme q' est définie positive, elle définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On peut donc appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique pour ce produit scalaire. Si on note $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormée pour le produit scalaire associé à q', on trouve que ${}^tQBQ = I_n$, le fait que la matrice à l'arrivée soit I_n étant simplement la traduction du fait que la base est orthonormée pour le produit scalaire.

(4) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que ${}^tPBP = I_n$ et telle que ${}^tPAP$ est diagonale (on pourra appliquer le théorème spectral à la matrice ${}^tQAQ$).

La matrice A étant symétrique (c'est la matrice de Gram associée à une forme quadratique), on vérifie que la matrice ${}^tQAQ$ l'est aussi. On peut donc lui appliquer le théorème spectral : il existe une matrice R orthogonale telle que ${}^tR^tQAQR$ soit diagonale. On réécrit cette matrice sous la forme : ${}^tR^tQAQR = {}^t(QR)AQR$. Il reste à voir que ${}^t(QR)BQR$ est bien égale à I_n : ${}^t(QR)BQR = {}^tR^tQBQR = {}^tRI_nR = I_n$ car R est orthogonale.