	ANNEE UNIVERSITAIRE 2023/2024	
université de BORDEAUX	**Examen première session session** **PARCOURS : MI 501A Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 18/12/2023 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés Épreuve de M. Poyeton	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit q la forme quadratique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de Gram de la base canonique pour q est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

1. En appliquant l'algorithme de décomposition en une combinaison de carrés de Gauss à q, montrer que S est définie positive et déterminer la décomposition de Cholesky $S = {}^tRR$ de S.
2. Calculer R^{-1} et en déduire S^{-1}.

Exercice 2

Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On appelle conditionnement de A relativement à $\|.\|$ le nombre réel

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$.
2. Montrer que si $\|.\|$ est une norme subordonnée, alors $\|I_n\| = 1$. En déduire que $\mathrm{cond}(A) \geq 1$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit cond_2 le conditionnement relatif à la norme matricielle subordonnée à $\|.\|_2$. Montrer que si $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$.
4. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. Soit $\Delta B \in \mathbb{R}^n$, et soient X et ΔX dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$AX = B \text{ et } A(X + \Delta X) = B + \Delta B.$$

Montrer que

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|},$$

où $\| \cdot \|$ est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et cond est le conditionnement défini par la norme subordonnée à $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3

Soient a un réel, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que les suites d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel (pour la résolution d'une équation $AX = B$) sont respectivement $X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B$ et $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}B$, avec les notations du cours.

1. Discuter en fonction de a la convergence pour tout $X^{(0)}$ de la méthode de Jacobi.

2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 4

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice symétrique S de $S_n(\mathbb{R})$ est dite positive si ${}^tXSX \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, et qu'elle est dite définie positive si ${}^tXSX > 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Rappeler pourquoi $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Montrer de même que S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

3. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ positives. Montrer que $A + B$ est symétrique positive.

4. On suppose que A est définie positive. On rappelle qu'il existe alors $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = {}^tRR$. Soit $C = {}^tR^{-1}BR^{-1}$. Montrer que C est une matrice symétrique positive.

5. Soit D une matrice diagonale à coefficients positifs ou nuls. Montrer que $\det(I_n + D) \geq 1 + \det(D)$.

6. En déduire que $\det(I_n + C) \geq 1 + \det(C)$.

7. En déduire que si A est définie positive, $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

8. On ne suppose à présent plus que A est définie positive, mais seulement que A et B sont symétriques positives. Pour k un entier strictement positif, on pose $A_k = A + \frac{1}{k}I_n$.

- Montrer que pour tout $k \geq 1$, la matrice A_k est définie positive.
- Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers A.
- En déduire que l'on a encore l'inégalité $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$ (on rappelle que l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui a M associe $\det(M)$ est continue).