

TD n°1 : THÉORÈME DE GERSHGORIN-HADAMARD

Exercice 1. Soit K un corps.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ est-elle diagonalisable ?
2. Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

Exercice 2. Soit K un corps, et soit $E = K[X]_n$ le K -espace vectoriel des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

1. Soit d l'application de E dans E définie par

$$d\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}.$$

Montrer que d est une application linéaire.

2. Quelle est la matrice M de d dans la base $1, X, X^2, \dots, X^n$ de E ?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. 1. La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si oui, la diagonaliser.
3. Vérifier que les valeurs propres de A sont bien dans l'ensemble prévu par le théorème de Gershgorin-Hadamard.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calculer les valeurs propres de A que $\rho(A) \leq 8$.

Exercice 5. Trouver une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ pour laquelle $0 \in \bigcup_{k=0}^n D_k$ (avec les notations du cours).

Exercice 6. Trouver une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante non inversible.

Exercice 7. 1. Soit z un nombre complexe. Montrer que $|\operatorname{Re}z| \leq |z|$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'inégalité $|x| < R$ sous forme de deux inégalités sans valeur absolue.

3. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante telle que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A ,

$$\operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Indication : si λ est une valeur propre, soit i tel que $\lambda \in D_i$. On peut appliquer la question 1) à $a_{i,i} - \lambda$.

Exercice 8. On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est réductible s'il existe une partition de $\{1, \dots, n\}$ en deux ensembles I et J telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Dans le cas contraire, on dit que A est irréductible.

On veut démontrer le second théorème de Gershgorin-Hadamard suivant.

Théorème 1. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible. Si une valeur propre λ de A n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gershgorin D_k , alors tous les cercles de Gershgorin passent par λ .

- Donner des exemples de matrices réductibles et de matrices irréductibles.
- Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible, et soit λ comme dans le théorème ci-dessus. Soit $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ . On pose

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : |x_i| = \max_j |x_j| \right\}.$$

- Si $K = \mathbb{C}$ et $x = {}^t(0, -3, 1, -1, 2)$, quel est l'ensemble I ? Même question si $x = {}^t(0, 1 + i, 1, -1, 1 - i)$.
- Montrer que si $i \in I$, alors

$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| (|x_i| - |x_j|) = 0.$$

Indications : chacune de ces deux égalités se montre par double inégalités. Dans cette question, le fait que A est irréductible n'entre pas en compte. C'est l'hypothèse sur λ qui intervient.

- $|\lambda - a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ provient des hypothèses du théorème.
 - $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ s'obtient en revoyant la preuve de Gershgorin-Hadamard.
 - $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| (|x_i| - |x_j|) \geq 0$ n'est pas très difficile à obtenir.
 - $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| (|x_i| - |x_j|) \leq 0$: utiliser $|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
- En déduire que $I = \{1, \dots, n\}$, et démontrer le théorème 1.

Exercice 9. Soit A dans $M_n(K)$. On dit que A est à diagonale fortement dominante si A est à diagonale dominante et s'il existe un indice k pour lequel

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|.$$

- Soit $A \in M_2(K)$ à diagonale fortement dominante. Montrer que si $a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1$ et 2 , alors A est inversible.
- Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe des matrices de taille n à diagonale fortement dominante non inversibles.
- En utilisant l'exercice 8, montrer que toute matrice de $M_n(K)$ irréductible et à diagonale fortement dominante est inversible.
- Donner un exemple de matrice à diagonale fortement dominante réductible, inversible et qui ne soit pas à diagonale strictement dominante.