

FEUILLE D'EXERCICES n° 3

Formes quadratiques, produits scalaires, orthogonalité

Exercice 1 – Montrer que les applications q de E dans \mathbb{R} suivantes sont des formes quadratiques. Pour chacune d'entre elles, indiquer si cette forme quadratique est positive, et si elle est définie positive.

- 1) $E = \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$.
- 2) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1x_2$ (où $x = (x_1, x_2)$).
- 3) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$) (pour la positivité de q , on peut utiliser le discriminant d'un polynôme du second degré).
- 4) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$).

Exercice 2 – Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- 1) Soient α_1 et α_2 deux réels. Soient f_1 et f_2 deux formes bilinéaires symétriques sur E . Montrer que $\alpha_1f_1 + \alpha_2f_2$ est une forme bilinéaire symétrique.
- 2) Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E . Montrer que $\alpha q_1 + \alpha_2q_2$ est une forme quadratique.
- 3) Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E ?

Exercice 3 – Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques et donner leur forme bilinéaire symétrique associée. Indiquer ensuite si q est positive et si elle est définie positive.

- 1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de \mathbb{R} .

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

- 2)

$$q : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$$

Indications. On rappelle le résultat d'analyse suivant.

Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+ . Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

On rappelle aussi qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$ a un nombre fini de racines.

Exercice 4 – Soit \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire défini par $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

- 1) Soient $b_1 = (1, 1)$ et $b_2 = (1, 0)$. Montrer que $b = (b_1, b_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- 2) En donner l'orthogonalisée b^* de Gram-Schmidt. En déduire son orthonormalisée de Gram-Schmidt b' .
- 3) Quelle est la matrice de passage de b' à b ?
- 4) Calculer les coordonnées de $(2, 1)$ dans la base b' .

Exercice 5 –

- 1) Même exercice sur \mathbb{R}^3 , avec $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ et les vecteurs $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$ et $b_3 = (1, 0, 1)$ (on calculera les coordonnées de $x = (1, 1, 1)$ dans la base b').
- 2) Soit $F = \text{Vect}(b_1, b_2)$. Soient p la projection orthogonale sur F et p' la projection orthogonale sur F^\perp . Déterminer $p(x)$ et $p'(x)$ (voir la proposition 4.3.9).
- 3) Calculer la distance de x à F .

Exercice 6 – On munit \mathbb{R}^4 du produit scalaire

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

- 1) Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0))$. Déterminer une base orthonormale de F .
 - 2) Soit p la projection orthogonale sur F , et soit $x = (0, 0, 0, 1)$. Déterminer $p(x)$. Calculer la distance $d(x, F)$ de x à F .
 - 3) Calculer $d(x, F^\perp)$.
- Indication. Pas besoin de déterminer F^\perp .

Exercice 7 – Soit $E = \mathbb{R}[X]_2$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = \int_0^1 P^2(t) dt.$$

- 1) Montrer que E muni de q est un espace euclidien.
- 2) Déterminer une base orthogonale de E formée de polynômes unitaires.

Exercice 8 – Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. On définit sur E l'application q par

$$q(M) = \text{Tr}({}^t M M).$$

- 1) Montrer que q est une forme quadratique.
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien.
- 3) Déterminer une base orthonormale de E .

Exercice 9 – Soit E un espace euclidien. Soit (b_i) une base de E et soit (b_i^*) l'orthonormalisée de Gram-schmidt de (b_i) .

1) Que vaut b_1^* ?

2) Montrer que pour $j \in [[2, n]]$, $b_j^* = \frac{b'_j}{\|b'_j\|}$, où $b'_j = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} (b_j | b_i^*) b_i^*$.

Exercice 10 – Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien. Soit F un sous espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur F . Soit x un élément de E . Montrer que pour tout $y \in F \setminus \{p(x)\}$,

$$d(x, y) > d(x, p(x)).$$

En déduire que

$$d(x, F) = d(x, p(x)).$$

Exercice 11 – Soit n un entier naturel non nul. Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$. On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire usuel $(\cdot | \cdot)$. Soit p la projection orthogonale sur H . Montrer que pour tout x de \mathbb{R}^n ,

$$p(x) = x - \frac{(a | x)}{(a | a)} a$$

Exercice 12 – Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E . Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à q .

- 1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $b(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.
- 2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$.
- 3) Cette égalité est appelée identité du parallélogramme. Pourquoi ?

Exercice 13 – Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit l'application q par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2$$

où (a_i) vérifie $\sum_{i=1}^n a_i^2 < 1$.

- 1) Montrer que q est une forme quadratique (ne pas développer le carré ; pour trouver la forme bilinéaire symétrique associée, on peut utiliser l'identité $(A+B)^2 - A^2 - B^2 = 2AB$).
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien (pour montrer que q est définie positive, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 14 – Soit n un entier naturel non nul.

- 1) Montrer que pour tout (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n , $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
- 2) Déterminer l'ensemble des (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n tels que $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Exercice 15 – Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et q une forme quadratique positive sur E . On note b la forme bilinéaire symétrique associée à q .

- 1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$b(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui n'a été démontrée en cours que dans le cas des formes quadratiques définies positives).

- 2) Donner un exemple où $b(x, y)^2 = q(x)q(y)$ et où x et y ne sont pas colinéaires.
- 3) Donner un exemple où q n'est plus positive et où $b(x, y)^2 > q(x)q(y)$.