Université de Bordeaux **L3 – Algorithmique mathématique 2**
Mathématiques 2023–2024

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Matrices de Gram, matrices symétriques, orthogonales, espaces hermitiens

Exercice 1 – Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$$

Quelle est la matrice de Gram de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour q ?

Exercice 2 – Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par M (c'est-à-dire telle que M soit la matrice de Gram de la base canonique) ?

Exercice 3 – Soit $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positive.

1) Montrer que pour tout i, $a_{ii} \geqslant 0$.

2) Montrer que $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$.

Exercice 4 –

1) Soit E un espace euclidien. Soit $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

On dit que deux sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $(x|y) = 0$.

Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E (c'est-à-dire égal à son adjoint). Montrer que les espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

2) Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(X|Y) = {}^tXY$. Montrer que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 5 –

1) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver une matrice orthogonale U telle que ${}^tUAU$ soit diagonale.

2) Même question si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 6 – Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Exercice 7 – [Décomposition QR] On note $\mathcal{T}_{sup,n}^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{T}_{sup,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}_{\mathrm{sup},n}^{++}(\mathbb{R})$ uniques telles que $A = QR$ (on pourra utiliser une orthonormalisée de Gram-Schmidt). On appelle cette factorisation la décomposition QR de A.

2) Donner la décomposition QR de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier sans calculs que S est symétrique définie positive. [*Penser à Hadamard-Gershgorin*]

2) Soit $(*|*)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ défini par S, c'est-à-dire : $(X|Y) = {}^tXSY$. Interpréter S comme la matrice de Gram pour $(\cdot|\cdot)$ d'une base de $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt e' de la base canonique $e = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi que la matrice de passage de e' à e. En déduire une matrice $R \in \mathcal{T}_{sup,n}^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tRR$ (factorisation de Cholesky de S).

Exercice 9 – Soient E un espace hermitien, h son produit scalaire hermitien et q sa forme quadratique hermitienne associée. Pour tout $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{q(x)}$. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme.