

**FEUILLE D'EXERCICES n° 6**

Espaces hermitiens, Normes, Normes matricielles

**Exercice 1** – Soient  $E$  un espace hermitien,  $h$  son produit scalaire hermitien et  $q$  sa forme quadratique hermitienne associée. Pour tout  $x \in E$ , on note  $\|x\| = \sqrt{q(x)}$ . Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme.

**Exercice 2** – Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  Pour tout  $x$  dans  $K^n$ , on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Montrer que ces trois expressions définissent des normes sur  $K^n$ .

**Exercice 3** – Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Soient  $\|\cdot\|_E$  une norme sur  $E$ ,  $\|\cdot\|_F$  une norme sur  $F$  et  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $u$  est continue.
- (2)  $u$  est continue en 0.
- (3) Il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

- (4)  $u$  est lipschitzienne, c'est-à-dire : il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\|u(x) - u(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

**Exercice 4** – L'application  $\rho$  est elle une norme de  $M_n(K)$  ?

**Exercice 5** – Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ . Montrer les égalités

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

**Exercice 6** – On considère l'application de  $M_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

- 1) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $M_n(K)$ .
- 2) Montrer que si  $N$  est une norme de  $M_n(K)$  subordonnée à une norme de  $M_{n,1}(\mathbb{C})$ , alors  $N(I_n) = 1$ .
- 3) Qu'en déduire sur  $\|\cdot\|$  ?
- 4) La norme  $\|\cdot\|$  est elle une norme matricielle ?

**Exercice 7** – Donner un exemple de norme de  $M_n(\mathbb{C})$  qui n'est pas matricielle.

**Exercice 8** – Soit  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ . Pour tout  $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ , on pose  $N(v) = \|Qv\|_\infty$ .

- 1) Montrer que  $N$  définit une norme sur  $M_{n,1}(\mathbb{C})$ .
- 2) On note  $N'$  sa norme subordonnée sur  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $N'(M) = \|MQM^{-1}\|_\infty$  pour tout  $M \in M_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 9** – Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ . On se propose ici de démontrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A}A)}.$$

1) Montrer qu'il existe une matrice unitaire  $U$  et une matrice diagonale  $D \in M_n(\mathbb{R})$  à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que

$${}^t\bar{A}A = {}^t\bar{U}DU.$$

2) Montrer que

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|y\|_2=1} {}^t\bar{y}Dy = \rho(D)$$

Conclure.

**Exercice 10** –

1) Montrer qu'à toute norme matricielle on peut associer une norme de  $\mathbb{C}^n$  avec laquelle elle est compatible.

2) Montrer que pour toute norme matricielle  $N$  de  $M_n(\mathbb{C})$  et toute matrice  $A$  on a

$$\rho(A) \leq N(A).$$

3) Soit  $N(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ . Est-ce une norme sur  $M_n(\mathbb{C})$ ? Montrer que si  $n \geq 2$ , il existe  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\rho(A) > N(A)$ .

**Exercice 11** – Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1) Montrer que si  $A \in M_n(K)$  et  $B \in \text{GL}_n(K)$ , le polynôme caractéristique de  $AB$  est égal à celui de  $BA$ .

2) Montrer que le résultat reste vrai si  $B \in M_n(K)$  n'est pas inversible (on pourra utiliser une suite de la forme  $B + \frac{1}{k}I_n$ ).

3) Montrer ce résultat dans le cas plus général où  $K$  est un anneau commutatif quelconque, en calculant le produit suivant.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & -A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12** – On considère l'application de  $M_n(K)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\|A\|_s = \sqrt{\text{Tr}({}^t\bar{A}A)}.$$

1) Montrer que

$$\|A\|_s = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

2) Montrer que  $\|\cdot\|_s$  est une norme de  $M_n(K)$ . On l'appelle norme de Schur.

3) Montrer que  $\|\cdot\|_s$  n'est pas une norme induite par une norme de  $K^n$ .

4) Montrer que  $\|\cdot\|_s$  est une norme matricielle.

5) Montrer que la norme de Schur est compatible avec  $\|\cdot\|_2$ .

6) montrer que

$$\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$