

FEUILLE D'EXERCICES n° 7
Normes, Normes matricielles, suite

Exercice 1 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$. Montrer les égalités

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Exercice 2 – On considère l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R} définie par

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

- 1) Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur $M_n(K)$.
- 2) Montrer que si N est une norme de $M_n(K)$ subordonnée à une norme de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $N(I_n) = 1$.
- 3) Qu'en déduire sur $\| \cdot \|$?
- 4) La norme $\| \cdot \|$ est elle une norme matricielle ?

Exercice 3 – Donner un exemple de norme de $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas matricielle.

Exercice 4 – Soit $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour tout $v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $N(v) = \|Qv\|_\infty$.

- 1) Montrer que N définit une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$.
- 2) On note N' sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N'(M) = \| \|QMQ^{-1}\|_\infty$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. On se propose ici de démontrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A}A)}.$$

- 1) Montrer qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que

$${}^t\bar{A}A = {}^t\bar{U}DU.$$

- 2) Montrer que

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|y\|_2=1} {}^t\bar{y}Dy = \rho(D)$$

Conclure.

Exercice 6 –

- 1) Montrer qu'à toute norme matricielle on peut associer une norme de \mathbb{C}^n avec laquelle elle est compatible.
- 2) Montrer que pour toute norme matricielle N de $M_n(\mathbb{C})$ et toute matrice A on a

$$\rho(A) \leq N(A).$$

- 3) Soit $N(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Est-ce une norme sur $M_n(\mathbb{C})$? Montrer que si $n \geq 2$, il existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) > N(A)$.

Exercice 7 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- 1) Montrer que si $A \in M_n(K)$ et $B \in \text{GL}_n(K)$, le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA .
- 2) Montrer que le résultat reste vrai si $B \in M_n(K)$ n'est pas inversible (on pourra utiliser une suite de la forme $B + \frac{1}{k}I_n$).
- 3) Montrer ce résultat dans le cas plus général où K est un anneau commutatif quelconque, en calculant le produit suivant.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & -A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 – On considère l'application de $M_n(K)$ dans \mathbb{R} définie par

$$\|A\|_s = \sqrt{\text{Tr}({}^t\bar{A}A)}.$$

- 1) Montrer que

$$\|A\|_s = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

- 2) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme de $M_n(K)$. On l'appelle norme de Schur.
- 3) Montrer que $\|\cdot\|_s$ n'est pas une norme induite par une norme de K^n .
- 4) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle.
- 5) Montrer que la norme de Schur est compatible avec $\|\cdot\|_2$.
- 6) montrer que

$$\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$