Université de Bordeaux
Mathématiques

Algorithmique mathématique 2
2023–2024

FEUILLE D'EXERCICES n° 10

Factorisation QR, factorisation de Cholesky

Exercice 1 – Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, déterminer la décomposition de Cholesky $S = {}^tRR$ (si elle existe). Montrer que S est symétrique définie positive.

2) En déduire une décomposition $S = {}^tUDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. On pourra pour cela définir $d = \mathrm{Diag}(r_{1,1}, r_{2,2}, r_{3,3})$ où les $r_{i,j}$ sont les coefficients de R, $U = d^{-1}R$ et $D = d^2$.

Exercice 2 – Soit q la forme quadratique canoniquement associée à la matrice S de l'exercice précédent.

1) Appliquer l'algorithme de décomposition en combinaison linéaire de carrés à q.

2) En déduire une factorisation $S = {}^tUDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale, et montrer que q est définie positive.

3) En déduire la factorisation de Cholesky de S.

Exercice 3 – Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit q_n la forme quadratique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de Gram de la base canonique pour q_n est

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

1) En appliquant l'algorithme de décomposition en une combinaison de carrés de Gauss à q_n, montrer que S_n est symétrique définie positive et déterminer la décomposition de Cholesky de S_n.

2) Déterminer la décomposition LU de S_n.

Exercice 4 – Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

C'est-à-dire $J_n = (1)_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$.

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ Écrire ${}^tXJ_nX$ sous forme d'un carré.

2) Soit q_n la forme quadratique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de Gram de la base canonique pour q_n est

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & n-2 \\ 1 & & \cdots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

C'est-à-dire $S_n = (\min(i,j))_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$.

3) En appliquant l'algorithme de décomposition en une combinaison de carrés de Gauss à q_n, montrer que S_n est symétrique définie positive et déterminer la décomposition de Cholesky de S_n.

4) Déterminer la décomposition LU de S_n.

Exercice 5 – Sur $\mathbb{R}^n$, soit

$$q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$$

1) Montrer que q est positive mais qu'elle n'est pas définie positive.

2) Pour $n = 3$, appliquer à q l'algorithme de décomposition de Gauss. Écrire la matrice de Gram S de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour q. Factoriser S sous la forme $S = UDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,3}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale.

Exercice 6 – Soit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à S. Appliquer à q l'algorithme de Gauss de décomposition de q en combinaison linéaire de carrés.

Exercice 7 – Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A et $F = \mathrm{Vect}(A_1, \ldots, A_n)$ le sous espace vectoriel de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ engendré par ces colonnes. Soit π la projection orthogonale sur F pour le produit scalaire défini sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ par $(X|Y) = {}^tXY$.

Soit $B \in M_m(\mathbb{R})$.

On rappelle que $\pi(B)$ est l'unique élément de F tel que $B - \pi(B) \in F^{\perp}$.

1) Montrer que quand X varie dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si $AX = \pi(B)$.

2) En déduire que $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$ (on établira d'abord que $AX = \pi(B)$ si et seulement si $(A_i|AX - B) = 0$ pour tout i).

3) Montrer que si $\mathrm{rg}\, A = n$, alors ${}^tAA \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4) Soit pour $\varepsilon > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathrm{rg}\, A = 3$, mais qu'un calcul mené avec une précision insuffisante peut conduire à un arrondi de ${}^tAA$ qui est de rang 1.

Exercice 8 – On établit les formules permettant de calculer la décomposition $S = {}^tUDU$ où $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, par la méthode des coefficients indéterminés.

On pose $S = (s_{i,j})$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Montrer que pour tout $i \in [[1, n]]$ et tout $j \in [[i+1, n]]$

$$(1) \quad d_i = s_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} d_i u_{k,i}^2$$

$$(2) \quad u_{i,j} = \frac{1}{d_i}\left(s_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{k,i} u_{k,j}\right)$$