Université de Bordeaux
Mathématiques

**L3 - Algorithmique matricielle**
2024–2025

# FEUILLE D'EXERCICES n° 1
## Théorème de Gershgorin-Hadamard

**Exercice 1** – Soit $K$ un corps.

**1)** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ est-elle diagonalisable ?

**2)** Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

**Exercice 2** – Soit $K$ un corps, et soit $E = K[X]_n$ le $K$-espace vectoriel des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$.

**1)** Soit $d$ l'application de $E$ dans $E$ définie par

$$d\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Montrer que $d$ est une application linéaire.

**2)** Quelle est la matrice $M$ de $d$ dans la base $1, X, X^2, \dots, X^n$ de $E$ ?

**3)** Cette matrice est-elle diagonalisable ?

**Exercice 3** –

**1)** La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2)** Si oui, la diagonaliser.

**3)** Vérifier que les valeurs propres de $A$ sont bien dans l'ensemble prévu par le théorème de Gershgorin-Hadamard.

**Exercice 4** – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calculer les valeurs propres de $A$ que $\rho(A) \leqslant 8$.

**Exercice 5** – Trouver une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle $0 \in \bigcup_{k=0}^{n} D_k$ (avec les notations du cours).

**Exercice 6** – Trouver une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante non inversible.

**Exercice 7** –

**1)** Soit $z$ un nombre complexe. Montrer que $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$.

**2)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'inégalité $|x| < R$ sous forme de deux inégalités sans valeur absolue.

**3)** Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante telle que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in [[1, n]]$. Montrer que pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$,

$$\operatorname{Re} \lambda > 0.$$

[*Si $\lambda$ est une valeur propre, soit $i$ tel que $\lambda \in D_i$. On peut appliquer la question 1) à $a_{i,i} - \lambda$.*]

**Exercice 8** – On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est réductible s'il existe une partition de $\{1, \ldots n\}$ en deux ensembles $I$ et $J$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Dans le cas contraire, on dit que $A$ est irréductible.

On veut démontrer le second théorème de Gershgorin-Hadamard suivant.

**Théorème.** *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible. Si une valeur propre $\lambda$ de $A$ n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gershgorin $D_k$, alors tous les cercles de Gershgorin passent par $\lambda$.*

**1)** Donner des exemples de matrices réductibles et de matrices irréductibles.

**2)** Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible, et soit $\lambda$ comme dans le théorème ci-dessus. Soit $x =^t (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à $\lambda$. On pose

$$I = \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} \;:\; |x_i| = \max_j |x_j| \right\}.$$

a) Si $K = \mathbb{C}$ et $x = {}^t(0, -3, 1, -1, 2)$, quel est l'ensemble $I$ ? Même question si $x = {}^t(0, 1 + i, 1, -1, 1 - i)$.

b) Montrer que si $i \in I$, alors

$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = 0.$$

*Indications. Chacune de ces deux égalités se montre par double inégalités. Dans cette question, le fait que $A$ est irréductible n'entre pas en compte. C'est l'hypothèse sur $\lambda$ qui intervient.*

- $|\lambda - a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *provient des hypothèses du théorème.*
- $|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *s'obtient en revoyant la preuve de Gershgorin-Hadamard.*
- $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \geqslant 0$ *n'est pas très difficile à obtenir.*
- $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \leqslant 0$ *: utiliser* $|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

**3)** En déduire que $I = \{1, \ldots, n\}$, et démontrer le théorème 8.
[*C'est là qu'intervient le fait que $A$ est irréductible.*]

**Exercice 9** – Soit $A$ dans $M_n(K)$. On dit que $A$ est à diagonale fortement dominante si $A$ est à diagonale dominante et s'il existe un indice $k$ pour lequel

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|.$$

**1)** Soit $A \in M_2(K)$ à diagonale fortement dominante. Montrer que si $a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1$ et 2, alors $A$ est inversible.

**2)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe des matrices de taille $n$ à diagonale fortement dominante non inversibles.

**3)** En utilisant l'exercice 8, montrer que toute matrice de $M_n(K)$ irréductible et à diagonale fortement dominante est inversible.

**4)** Donner un exemple de matrice à diagonale fortement dominante réductible, inversible et qui ne soit pas à diagonale strictement dominante.