FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Pivot de Gauss - Décomposition PLU

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$ et décomposer A sous la forme LU.

2) Calculer $\det A$.

3) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [[1, 3]]$, résoudre l'équation $AX = e_i$. En déduire A^{-1}.

Exercice 2 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$ et trouver une factorisation $A = PLU$.

2) Calculer $\det A$.

Exercice 3 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Trouver une factorisation $A = PLU$.

2) Calculer $\det A$.

Exercice 4 – Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – [Unicité de la décomposition LU]

1) Montrer que si T et T' sont des matrices inversibles de $\mathcal{T}^1_{\mathrm{inf},n}(K)$ (resp. $\mathcal{T}_{\mathrm{inf},n}(K)$), alors TT' et T^{-1} appartiennent à $\mathcal{T}^1_{\mathrm{inf},n}(K)$ (resp. $\mathcal{T}_{\mathrm{inf},n}(K)$). En déduire un résultat similaire pour les matrices triangulaires supérieures.

Indications. Pour TT', on calculera $(TT')_{i,j}$ pour $i < j$. Pour T^{-1}, on pourra par exemple considérer l'équation $TX = e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

2) Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(K)$ admettant une décomposition LU. Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 6 – [Complexité : résolution d'un système triangulaire]

1) Évaluer le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un système triangulaire.

2) Évaluer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer l'inverse d'une matrice A en utilisant une factorisation $A = PLU$ (supposée connue).

Exercice 7 – Pour résoudre $A^2X = B$ connaissant A et B, vaut-il mieux calculer A^2 puis appliquer le pivot de Gauss, ou procéder autrement ?

Exercice 8 – [Condition d'existence de la factorisation $A = LU$]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note A_k la matrice $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2}$. Montrer que A admet une décomposition $A = LU$ si et seulement si A_k est inversible pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et que dans ce cas, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$U_{kk} = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} ,$$

avec la convention $\det A_0 = 1$.
Indications. Il y a deux implications à démontrer. Pour le sens direct, on suppose que $A = LU$. On peut décomposer chacune de ces matrices par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix} , \quad L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ L' & L'' \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} U_k & U' \\ 0 & U'' \end{pmatrix} .$$

Pour la réciproque (plus difficile), on peut raisonner par récurrence.

Exercice 9 – Soient σ et τ deux éléments de S_n. Démontrer les assertions suivantes.

(1) $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$.

(2) $P_{\sigma\circ\tau} = P_\sigma P_\tau$.

(3) $P_{\mathrm{Id}} = I_n$, où Id désigne l'application identique sur $\{1, \ldots, n\}$.

(4) P_σ est inversible d'inverse $P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma$.

(5) $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ (où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ).

Exercice 10 – [Sommes d'entiers]

1) Rappeler la méthode du petit Gauss pour démontrer l'égalité

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Retrouver cette égalité en utilisant le fait que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2$$

3) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ en utilisant une méthode similaire à celle de la question précédente.